УДК 531.383 DOI: 10.31650/2415-377X-2019-74-33-39

ЭВОЛЮЦИЯ ВРАЩЕНИЙ ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНОГО ВОЗМУЩАЮЩЕГО МОМЕНТА СИЛ

Д.Д. Лещенко, д.ф.-м.н., профессор,
ORCID: 0000-0003-2436-221X
Т.А. Козаченко, к.ф.-м.н., доцент,
kushpil.t.a@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9034-3776
К.А. Козаченко, студент,
Одесская государственная академия строительства и архитектуры

Аннотация. Исследуются возмущенные вращательные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа, под действием нестационарного возмущающего момента сил. Тело предполагается быстро закрученным, а восстанавливающий и возмущающий моменты предполагаются малыми с определенной иерархией малости компонентов. Система уравнений движения тела приводится к стандартному виду системы с двумя вращающимися фазами. Для решения системы уравнений используется численное интегрирование. В качестве примера рассмотрена механическая модель возмущений, отвечающая движению тела в среде с линейной диссипацией. Полученная система проинтегрирована численно. Проведен анализ полученных решений.

Ключевые слова: случай Лагранжа, восстанавливающий и возмущающий моменты, линейная диссипация.

Введение. Возмущенные вращательные движения твердого тела относительно неподвижной точки могут быть строго сформулированы в рамках динамической модели твердого тела в случае Лагранжа. Уточнение моделей проводится путем учета возмущающих факторов, а также предположений относительно порождающего решения.

Для исследования систем уравнений используются различные методы. Одним из таких методов является асимптотический метод усреднения. В работах [1–3] изучаются возмущенные быстрые вращения твердого тела, близкие к регулярной прецессии в случае Лагранжа. В [1, 2] с помощью метода усреднения получены явные аналитические решения. Уравнения возмущенного движения рассматриваются при различных наборах и предположениях относительно порядков малости величин возмущающих моментов. Исследуются примеры, отвечающие постоянному и диссипативному моментам сил. В работе [3] приведены условия возможности усреднения уравнений движения по фазе угла нутации. Полученная усредненная система уравнений проинтегрирована численно при разных начальных условиях и параметрах задачи. В отличие от работ авторов [1–3] в данной статье проводится исследование неусредненной системы уравнений движения тела. Для решения системы уравнений используется численное интегрирование.

Постановка задачи. Рассмотрим вращательные движения динамически симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки O под действием постоянного восстанавливающего момента и возмущающего момента, медленно изменяющегося во времени. Динамические и кинематические уравнения Эйлера имеют вид:

$$\begin{aligned}
&A\dot{p}+(C-A)\,qr=k\sin\theta\cos\varphi+M_1,\\
&A\dot{q}+(A-C)\,pr=-k\sin\theta\sin\varphi+M_2,\\
&C\dot{r}=M_3,\qquad \dot{\psi}=(p\sin\varphi+q\cos\varphi)\operatorname{cosec}\theta,\\
&\dot{\theta}=p\cos\varphi-q\sin\varphi,\qquad \dot{\varphi}=r-(p\sin\varphi+q\cos\varphi)\operatorname{ctg}\theta,\\
&M_i=M_i(p,q,\ r,\ \psi,\ \theta,\ \varphi,\ \tau),\qquad \tau=\varepsilon t\quad (i=1,\ 2,\ 3).
\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь p, q, r – проекции вектора угловой скорости тела на главные оси инерции тела,

проходящие через точку O; величины $M_i\ (i=1,2,3)$ – проекции вектора возмущающего момента на те же оси; A – экваториальный, C – осевой момент инерции относительно точки O, ($A \neq C$). На тело действует постоянный восстанавливающий момент, величина которого равна k. Предполагается, что проекции вектора возмущающего момента являются известными 2π – периодическими функциями от углов Эйлера $\psi,\ \theta,\ \varphi$, а также зависят от медленного времени $\tau = \varepsilon t$ ($\varepsilon << 1$ – малый параметр, t – время).

Исследуем систему (1) при следующих предположениях [1]:

$$(p^2+q^2)^{1/2} << r,\ Cr^2 >> k,\ |M_i| << k\ (i=1,\ 2),\ M_3 \sim k, \tag{2}$$

которые означают, что направление угловой скорости тела близко к оси динамической симметрии; угловая скорость достаточно велика; две проекции вектора возмущающего момента на главные оси инерции тела малы по сравнению с восстанавливающим моментом, а третья – одного с ним порядка.

С учетом неравенства (2) введем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &p = \varepsilon P,\ q = \varepsilon Q,\ k = \varepsilon K, \\ &M_i = \varepsilon^2 M_i^*(P,Q,r,\psi,\theta,\varphi,\tau)\ (i=1,2), \\ &M_3 = \varepsilon M_3^*(P,Q,r,\psi,\theta,\varphi,\tau),\ \tau = \varepsilon t. \end{aligned} \tag{3}$$

Функции $M_i^*\ (i=1,2,3)$, а также переменные и постоянные $P,\ Q,\ r,\ \psi,\ \theta,\ K,\ A,\ C$ предполагаются ограниченными величинами порядка единицы при $\varepsilon \to 0$.

Ставится задача исследования поведения решений системы (1) при малом ε, если выполнены условия (2), (3), на интервале времени порядка ε^{-1} [4].

Методика исследования. Для исследования поставленной задачи используется методика, разработанная в [1, 4]. Для этого с помощью ряда преобразований и замены переменных в системе (1) перейдем от переменных $P,\ Q,\ r,\ \psi,\ \theta,\ \varphi,\ \tau$ к новым переменным $a,\ b,\ r,\ \psi,\ \theta,\ \alpha,\ \gamma,\ \tau$, где $\alpha = \gamma + \varphi$. В результате получим систему семи уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} &\dot a = \varepsilon A^{-1}(M_1^0\cos\gamma + M_2^0\sin\gamma) + \varepsilon KC^{-2}r^{-2}M_3^0\sin\theta\sin\alpha - \\ &\quad - \varepsilon KC^{-1}r^{-1}\cos\theta(b - KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\cos\alpha), \\ &\dot b = \varepsilon A^{-1}(M_1^0\sin\gamma - M_2^0\cos\gamma) - \varepsilon KC^{-2}r^{-2}M_3^0\sin\theta\cos\alpha + \\ &\quad + \varepsilon KC^{-1}r^{-1}\cos\theta\,(a + KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\sin\alpha), \\ &\dot r = \varepsilon C^{-1}M_3^0, \\ &\dot\psi = \varepsilon\cos ec\theta\,(a\sin\alpha - b\cos\alpha) + \varepsilon KC^{-1}r^{-1}, \\ &\dot\theta = \varepsilon\,(a\cos\alpha + b\sin\alpha), \\ &\dot\alpha = CA^{-1}r - \varepsilon ctg\theta\,(a\sin\alpha - b\cos\alpha) - \varepsilon KC^{-1}r^{-1}\cos\theta, \\ &\dot\gamma = (C-A)A^{-1}r, \\ &M_i^0\ (a,b,r,\psi,\theta,\alpha,\gamma,\tau) \equiv M_i^*(P,Q,r,\psi,\theta,\varphi,\tau),\ (i=1,2,3),\ \tau = \varepsilon t. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь γ имеет смысл фазы колебаний, также введены новые переменные a и b, полученные в результате преобразований системы (1) с учетом (3) при $\varepsilon = 0$ и могут быть выражены следующим образом:

$$\begin{aligned} &a = P\cos\gamma + Q\sin\gamma - KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\sin(\gamma+\varphi), \\ &b = P\sin\gamma - Q\cos\gamma + KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\cos(\gamma+\varphi). \end{aligned} \tag{5}$$

Система (4) является системой нелинейных дифференциальных уравнений с двумя быстрыми переменными – фазами α и γ, причем γ входит лишь в первые три уравнения (4). Данная система может быть представлена в стандартном виде:

$$\dot{\mathbf{x}} = \varepsilon \mathbf{X}(\mathbf{x}, \alpha, \gamma, \tau), \ \dot{\alpha} = CA^{-1}r + \varepsilon \mathrm{Y}(\mathbf{x}, \alpha, \tau),$$
$$\dot{\gamma} = (C - A)A^{-1}r, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \ \alpha(0) = \alpha_0, \ \gamma(0) = 0. \tag{6}$$

Здесь компонентами вектора $\mathbf{x}$, являются медленные переменные a, b, r, ψ, θ системы (4), вектор-функция $\mathbf{X}$ и скалярная функция Y определяются правыми частями уравнений (4), начальные значения получаются согласно:

$$a_0 = P_0 - KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0 \sin\varphi_0, \quad b_0 = -Q_0 + KC^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\cos\varphi_0,$$
$$r_0 \neq 0, \ \ \alpha_0 = \gamma_0 + \varphi_0, \ \ \left|(C - A)A^{-1}\right| \leq 1, \tag{7}$$

где $r_0, \psi_0, \theta_0, \varphi_0$ – постоянные, равные начальным значениям переменных при $t = 0$, P_0, Q_0 – начальные значения новых переменных P, Q, введенных согласно (3).

Поскольку проекции вектора возмущающего момента $M_i^*(i = 1, 2, 3)$ являются 2π-периодическими функциями по φ, то и функции M_i^0 из (4) согласно преобразованиям будут периодическими функциями α, γ с периодом 2π. Исходя из этого система (4) и соответственно (6) содержит две вращающиеся фазы α и γ, при этом частоты $\omega_1 = CA^{-1}r$ и $\omega_2 = (C - A)A^{-1}r$ переменны. Особенностью системы (4), является то, что отношение частот постоянно $\omega_2 / \omega_1 = 1 - AC^{-1}$.

Получить точное решение системы семи дифференциальных уравнений (4) в аналитическом виде является весьма затруднительным. В работах [1, 4, 5] для системы уравнений (4) были получены приближенные решения уравнений в первом приближении с помощью метода усреднения. Авторами данной работы система (4) решена численно с помощью математического пакета Maple при определенных параметрах моделей возмущений.

Результаты исследования. Исследуем возмущенное вращательное движение твердого тела близкое к случаю Лагранжа, под действием сопротивляющейся среды [4–6]. В качестве примера можно рассмотреть внешнюю среду, медленно изменяющую свойства вязкости вследствие изменения плотности, температуры, состава среды. Возмущающие моменты $M_i(i = 1, 2, 3)$ примут вид:

$$M_1 = -\varepsilon^2 f_1(\tau)P, \ M_2 = -\varepsilon^2 f_1(\tau)Q, \ M_3 = -\varepsilon f_3(\tau)r. \tag{8}$$

Здесь $f_1(\tau), f_3(\tau)$ – положительные интегрируемые функции, зависящие от свойств среды.

Систему (4) с учетом (8) запишем в виде:

$$\begin{aligned}
&\dot{a} = -\varepsilon A^{-1} f_1(\tau)(a + KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\sin\alpha) - \varepsilon KC^{-2}r^{-1}f_3(\tau)\sin\theta\sin\alpha - \\
&\quad -\varepsilon KC^{-1}r^{-1}\cos\theta(b - KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\cos\alpha), \\
&\dot{b} = -\varepsilon A^{-1} f_1(\tau)(b - KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\cos\alpha) + \varepsilon KC^{-2}r^{-1}f_3(\tau)\sin\theta\cos\alpha + \\
&\quad +\varepsilon KC^{-1}r^{-1}\cos\theta\,(a + KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\sin\alpha), \\
&\dot{r} = -\varepsilon C^{-1}f_3(\tau)r, \qquad \dot{\psi} = \varepsilon\cos ec\theta\,(a\sin\alpha - b\cos\alpha) + \varepsilon KC^{-1}r^{-1}, \\
&\dot{\theta} = \varepsilon\,(a\cos\alpha + b\sin\alpha), \\
&\dot{\alpha} = CA^{-1}r - \varepsilon ctg\theta\,(a\sin\alpha - b\cos\alpha) - \varepsilon KC^{-1}r^{-1}\cos\theta, \\
&\dot{\gamma} = (C - A)A^{-1}r.
\end{aligned} \tag{9}$$

Третье уравнение (9) проинтегрировано и получено решение в аналитическом виде (r_0 – произвольное начальное значение осевой составляющей скорости вращения):

$$r(t) = r_0 \exp\left[-C^{-1}\int_0^t f_3(\varepsilon t^*)\,dt^*\right], \quad r_0 \neq 0. \tag{10}$$

Рассмотрим случай, когда $f_1(\tau)$, $f_3(\tau)$ имеют вид:

$$f_1(\tau) = f_1 + \Delta f_1 \tau, \quad f_3(\tau) = f_3 + \Delta f_3 \tau, \quad f_1,\ f_3,\ \Delta f_1,\ \Delta f_3 - \text{const}.$$

Система (14) проинтегрирована численно при начальных условиях $a_0 = 1{,}38$; $b_0 = -0{,}98$; $r_0 = \sqrt{3}$; $\psi_0 = \frac{\pi}{3}$; $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$; $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$; $\gamma_0 = 0$ и параметрах задачи $A = 1$; $C = 1{,}5$; $K = 1$; $f_1 = 1$; $f_3 = 1{,}25$; $\Delta f_1 = \Delta f_3 = 1$. Численный расчет был проведен при различных значениях $\varepsilon \in \left[0,...10^{-4}\right]$. На рис. 1–3 изображены графики функций при $\varepsilon = 10^{-2}$.

На рис. 1 представлены графики функций $a,\ b,\ r$. Угловая скорость вращения относительно оси динамической симметрии уменьшается по экспоненте. Переменные a и b медленно стремятся к нулю.

На рис. 2 изображены графики функций $\psi,\ \theta$. Значение угла нутации колеблется в пределах 0,51-0,52 радиана, угол прецессии медленно возрастает.

Получены графики проекций $p,\ q$ вектора угловой скорости (рис. 3) в результате подстановки в выражения:

$$P = a\cos\gamma + b\sin\gamma + KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\sin\varphi,$$

$$Q = a\sin\gamma - b\cos\gamma + KC^{-1}r^{-1}\sin\theta\cos\varphi$$

и в соотношения (3) значений переменных $a,\ b,\ r, \theta,\ \alpha,\ \gamma$. На промежутке $t \in \left[0,...10^2\right]$ значения $p,\ q$ колеблются в пределах от 0,015 до -0,018 и медленно убывают.

Правильность счета контролировалась тем, что полученные по численным данным и формулам (9) значения для r совпадают с точным решением (10).

Также проведено сравнение решений системы (9) с результатами работы [5], в которой для решения аналогичной системы использовался метод усреднения. На промежутке $t \in \left[0,...10^2\right]$ графики функций, полученные в результате численного интегрирования системы (9) имеют аналогичный характер поведения, что и графики переменных $a,\ b,\ r$, $\psi,\ \theta,\ p,\ q$, полученные в [5]. При построении графиков переменных $a,\ b,\ r$, $\psi,\ \theta,\ p,\ q$, полученных методом усреднения, использовались те же числовые параметры, что и при решении системы (9).

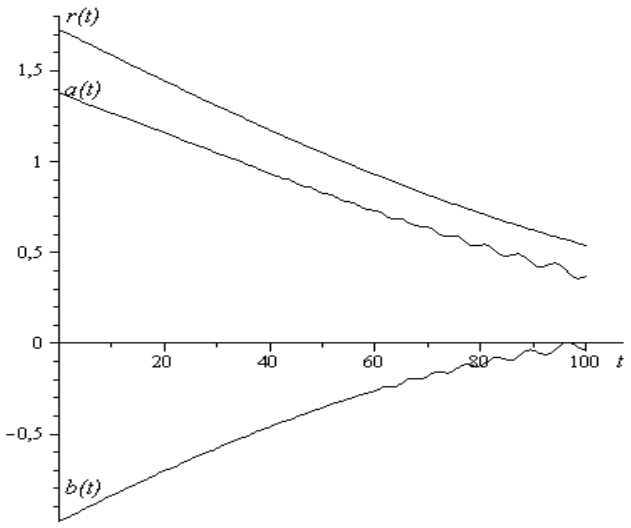

Рис. 1. Графики функций $a(t)$, $b(t)$, $r(t)$

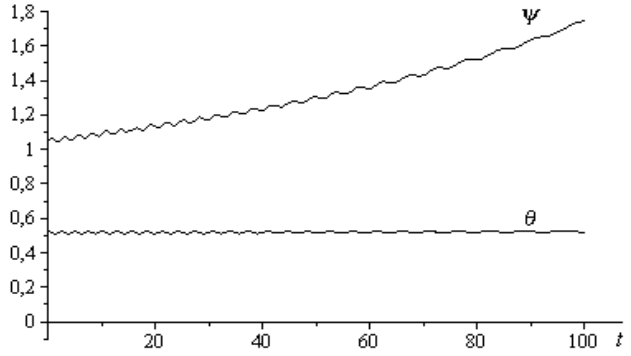

Рис. 2. Графики функций $\psi(t)$, $\theta(t)$.

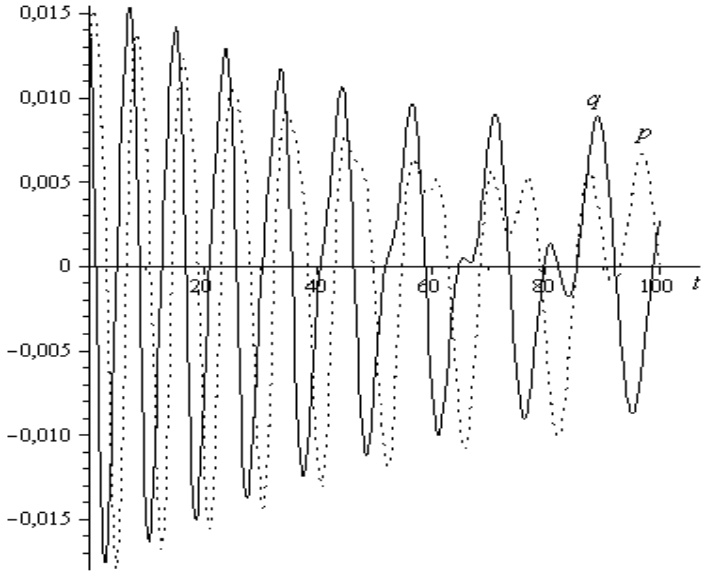

Рис. 3. Графики функций $p(t)$, $q(t)$

Выводы. Иследован класс движений динамически симметричного твердого тела относительно неподвижной точки с учетом нестационарного возмущающего момента. Тело предполагается быстро закрученным, а восстанавливающий и возмущающий моменты предполагаются малыми с определенной иерархией малости компонентов. Система уравнений (1) с помощью метода разделения переменных приведена к системе с двумя вращающимися фазами. Для решения системы уравнений используется численное интегрирование. Исследована механическая модель возмущений, отвечающая движению тела под действием диссипативного момента и имеющая самостоятельное значение для приложений. При определенных начальных значениях и параметрах задачи построены графики изменений углов прецессии и нутации, а также проекций вектора угловой скорости. Проведено сравнение решений системы (4) с результатами работы [5].

Литература

1. Akulenko L.D. Perturbed motion of a rigid body, close to regular precession / L.D. Akulenko, D.D. Leshchenko, F.L. Chernousko // Mechanics of Solids. – 1986. – № 5. – pp. 3–10.

2. Leshchenko D.D. Perturbed motions of a rigid body relative to fixed point / D.D. Leshchenko, S.N. Sallam // Mechanics of Solids. – 1990. –Vol. 2. – № 5. – pp. 15–23.

3. Akulenko L.D. The evolution of the motions of a rigid body close to the Lagrange case

under the action of an unsteady torque / L.D. Akulenko, Ya.S. Zinkevich, T.A. Kozachenko, D.D. Leshchenko // J. Appl. Math. Mech. – 2017. – Vol. 81. – № 2. – pp. 79-84.

4. Chernousko F.L. Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass / F.L. Chernousko, L.D. Akulenko, D.D. Leshchenko. – Cham: Springer, 2017. – 241 p.

5. Акуленко Л.Д. Эволюция вращений волчка Лагранжа под действием возмущающего момента сил, медленно изменяющегося во времени / Л.Д. Акуленко, Т.А. Козаченко, Д.Д. Лещенко // Вісник Одеськ. держ. ун-ту. Фіз. - мат. Науки, 2000. – Т. 5, Вип. 3. – С. 102–108.

6. Кошляков В.Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов: Аналитические методы / В.Н. Кошляков. – М.: Наука, 1985. – 288 с.

References

[1] L.D. Akulenko, D.D. Leshchenko and F.L. Chernousko, "Perturbed motion of a rigid body, close to regular precession", *Mechanics of Solids*, no. 5, pp. 3–10, 1986.

[2] D.D. Leshchenko, S.N. Sallam, "Perturbed motions of a rigid body relative to fixed point", *Mechanics of Solids*, vol. 2, no. 5, pp. 15–23, 1990.

[3] L.D. Akulenko, Ya.S. Zinkevich, T.A. Kozachenko, D.D. Leshchenko, "The evolution of the motions of a rigid body close to the Lagrange case under the action of an unsteady torque", J. *Appl. Math. Mech*, vol. 81, no. 2, pp. 79-84, 2017.

[4] F.L. Chernousko, L.D. Akulenko and D.D. Leshchenko, *Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass*, Cham: Springer, 2017.

[5] L.D. Akulenko, T.A. Kozachenko, D.D. Leshchenko, "Evolyutsiya vrashcheniy volchka Lagranzha pod deystviyem vozmushchayushchego momenta sil, medlenno izmenyayushchegosya vo vremeni", *Visnyk Odeskogo derzhavnogo universytetu*, vol. 5, no. 3, pp. 102–108, 2000.

[6] V.N. Koshlyakov, *Zadachi dinamiki tverdogo tela i prikladnoy teorii giroskopov: Analiticheskie metody*, Moscow: Nauka, 1985.

ЕВОЛЮЦІЯ ОБЕРТАНЬ ВОВЧКА ЛАГРАНЖА ПІД ДІЄЮ НЕСТАЦІОНАРНОГО ЗБУРЮЮЧОГО МОМЕНТУ СИЛ

Д.Д. Лещенко, д.ф.-м.н., професор,
ORCID: 0000-0003-2436-221X
Т.О. Козаченко, к.ф.-м.н., доцент,
kushpil.t.a@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9034-3776
К.О. Козаченко, студент,
Одеська державна академія будівництва та архітектури

Анотація. Досліджується рух динамічно симетричного твердого тіла навколо нерухомої точки *O* під дією відновлюючого моменту і збурюючого моменту, який повільно змінюється з часом. Передбачається, що на тіло діє відновлюючий момент, максимальна величина якого дорівнює k і який створюється сталою за величиною і напрямом силою, що прикладена в деякій фіксованій точці осі динамічної симетрії. Прикладом може служити випадок важкого вовчка. Також відновлюючий момент може бути обумовлений аеродинамічними силами.

Розглядаються збурені рухи вовчка Лагранжа у випадку, коли напрям кутової швидкості тіла близький до осі динамічної симетрії, кутова швидкість достатньо велика, так що кінетична енергія тіла набагато більше потенціальної енергії, обумовленої відновлюючим моментом, дві проекції вектора збурюючого моменту на головні осі інерції тіла малі порівняно з відновлюючим моментом, а третя – одного з ним порядку.

Ставиться задача дослідження поведінки розв'язків системи рівнянь руху твердого тіла при значеннях малого параметра ε, відмінних від нуля, на досить великому проміжку часу.

Сукупність виконаних припущень дозволяє отримати більш зручну для подальшого дослідження систему рівнянь. Отримана система є двочастотною, причому відношення частот стале. Система рівнянь приводиться до стандартного вигляду систем з двома обертовими фазами, за допомогою поділу змінних на швидкі і повільні. У даній роботі для розв'язування системи рівнянь руху використовується чисельне інтегрування.

Як приклад розглянута механічна модель збурень, що відповідає руху тіла в середовищі з лінійною дисипацією. Отримана система проінтегрована чисельно при початкових умовах і параметрах задачі. Проведено порівняння розв'язків системи рівнянь одержаних в результаті чисельного інтегрування з результатами роботи, в якій для аналогічної системи рівнянь руху використовувався метод усереднення. В результаті аналізу розв'язків рівнянь встановлено кількісні та якісні особливості руху тіла. Такі проблеми мають місце при дослідженні руху супутника відносно центра мас, в динаміці гіроскопів.

Ключові слова: випадок Лагранжа, відновлюючий і збурюючий моменти, лінійна дисипація.

EVOLUTION OF ROTATIONS OF LAGRANGE TOP UNDER THE ACTION OF UNSTEADY PERTURBATION TORQUES

D.D. Leshchenko, D.Sc. in Physics and Maths, Professor,
ORCID: 0000-0003-2436-221X
T.A. Kozachenko, Ph.D. in Physics and Maths, Associate Professor,
kushpil.t.a@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9034-3776
K.A. Kozachenko, student
Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

Abstract. We consider a perturbed motion relative to a fixed point for a dynamically symmetric heavy rigid body in the case of perturbations of arbitrary nature. It is assumed that the body is acted upon by the restoring torque, the maximum value of which is equal to k and which is created by a constant in magnitude and direction force applied at a fixed point of the axis of dynamic symmetry. The restoring torque can also be caused by aerodynamic forces.

Perturbed motions of Lagrange's top were considered in case where the angular velocity of the body is close to the axis of dynamic symmetry, the angular velocity is high enough, so that the kinetic energy of the body is much greater than the potential energy due to the restoring torque, the two projections of the perturbation torque vector on the principal axes of inertia of the body are small compared with the restoring torque, whereas the third one is of the same order of magnitude. Corresponding standard system is a two-frequency system where the frequency ratio is constant.

The problem is formulated to study the asymptotic behavior of the solution of system with a small ε. A small parameter is introduced in a special way. We arrive at system which is more convenient for further study. The system contains two rotating phases, while the corresponding frequencies are variable. A very significant feature of system is that the ratio of frequencies is constant.

The influence of perturbation torque of symmetric linear dissipation by the environment is investigated. Numerical solutions of the systems of equations are constructed. As a result of analysis and solution of the obtained equations, we establish some quantitative and qualitative specific features of the motions and provide a description of the evolution of the body motion. Such problems take place in the investigation of the motion of satellite about its center of mass, in dynamics of gyroscopes.

Keywords: Lagrange case, restoring and perturbation torques, linear dissipation.

Стаття надійшла 9.01.2019