УДК 539.3:624.046.3 DOI: 10.31650/2415-377X-2019-76-9-15

О РЕШЕНИЯХ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ БУБНОВА

Бекшаев С.Я.
Одесская государственная академия строительства и архитектуры
fevs@ogasa.org.ua, ORCID: 0000-0002-5752-5321

Аннотация. Работа посвящена решению задачи повышения устойчивости прямолинейного многопролетного стержня, шарнирно опертого на опоры, среди которых могут быть как упругие, так и абсолютно жесткие, сжатого продольной силой, постоянной по длине стержня. Допускается произвольное по длине распределение изгибной жесткости стержня. Известны требования к расположению опор, при котором может достигаться максимально возможное при данном их числе значение критической силы стержня. В работе предложен метод, позволяющий определить коэффициенты жесткости опор, обеспечивающих это максимальное значение критической силы и находящихся в произвольных наперед заданных отношениях. При решении используются, в основном, качественные методы теории устойчивости стержневых систем.

Ключевые слова: многопролетный стержень, устойчивость, критическая сила, максимум, качественные методы.

Введение. При проектировании инженерных сооружений приходится сталкиваться с задачей повышения устойчивости их элементов, работающих в условиях продольного сжатия. Известны многочисленные исследования [1-3], посвященные задачам повышения критических сил сжатых стержней за счет изменения их геометрических характеристик, перераспределения материала по длине стержня и влияния других факторов. Их использование во многих случаях ограничивается разнообразными эксплуатационными требованиями к конструкции

Повышение устойчивости сжатого стержня может быть достигнуто за счет установки дополнительных опор. При этом возникает задача рационального выбора положений и характеристик вводимых опор с целью достижения максимального повышения основной критической силы (далее – КрС) при минимальных затратах, связанных с их установкой.

Одной из ранних задач этого направления стала задача Бубнова [4], в которой требовалось так расставить n одинаковых промежуточных упругих опор в призматическом шарнирно опертом по концам на жесткие опоры стержне, чтобы основная КрС так образованного $(n+1)$ – пролетного стержня, сжатого постоянной по длине осевой силой, достигла максимального значения. Было установлено, что для этого вводимые промежуточные опоры должны располагаться в узлах формы потери устойчивости, соответствующей $(n+1)$-й КрС исходного однопролетного стержня. Кроме того, было найдено минимальное конечное значение $c_{\text{Б}}$ коэффициента жесткости этих опор, обеспечивающее максимум КрС. Увеличение жесткости опор по сравнению с $c_{\text{Б}}$ не изменяет уже достигнутого максимального значения, которое при этих значениях жесткости становится двукратным. Я.Л. Нудельманом [5] был предложен простой способ отыскания бесконечного множества различных наборов коэффициентов жесткости опор многопролетного стержня, включая крайние, не обязательно равных между собой, которые обеспечивают решение той же задачи, т.е. доводят КрС до ее максимально возможного при данном числе опор значения, делая его двукратным. При этом уменьшение любого из коэффициентов ведет к снижению КрС. Решение Я.Л. Нудельмана оставляло открытым вопрос об общности предложенного подхода и об эффективных приемах отыскания всех наборов коэффициентов жесткости опор, обеспечивающих максимум и двукратность КрС $(n+1)$ – пролетного стержня. Решению этих вопросов посвящена настоящая работа.

Постановка задачи. Введем обозначения:

(OL) – однопролетный стержень, шарнирно опертый по концам O и L на жесткие опоры;

S^n – стержень, образованный из (OL) введением n промежуточных точечных шарнирных опор и заменой крайних опор опорами произвольной жесткости (рис. 1);

$P_1, P_2, \ldots, P_j, \ldots$ – КрС стержня (OL), занумерованные в порядке возрастания;

j -я форма – форма потери устойчивости стержня (OL), отвечающая КрС P_j;

ℓ_j – длина j -го пролета стержня S^n; расстояние между $(j-1)$-м и j -м узлами $(n+1)$-й формы;

c_j – коэффициент жесткости j -й опоры.

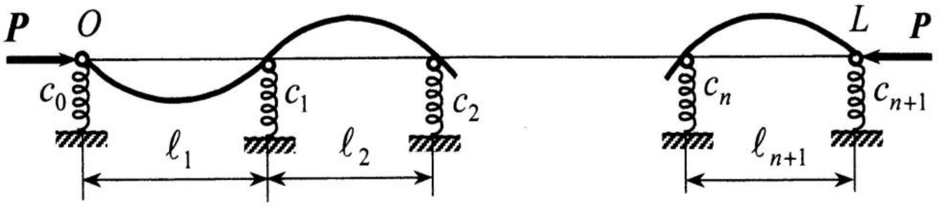

Рис. 1. $(n+1)$ – пролетный упруго опертый стержень S^n

Целью работы является решение обобщенной задачи Бубнова (ОЗБ) – найти набор значений $c_0, c_1, \ldots, c_{n+1}$ коэффициентов жесткости опор, установленных в узлах $(n+1)$-й формы, находящихся в произвольном наперед заданном отношении, при котором основная КрС S^n равна P_{n+1} и уменьшение любого из c_j влечет за собой уменьшение основной КрС.

Методика исследования. Решение опирается на качественные результаты теории устойчивости стержневых систем [6]. В частности, используется следующая теорема о наложении связей.

Основная КрС стержневой системы S^n, образованной из исходной S^0 введением n связей, не превосходит величины P_{n+1} $(n+1)$-й критической силы исходной системы и может стать равной P_{n+1} только при условии, что наложенные связи не препятствуют осуществлению $(n+1)$-й формы исходной системы.

В рассматриваемом случае стержня и связей в виде точечных опор требование теоремы означает, что все промежуточные опоры должны располагаться в узлах $(n+1)$-й формы [5].

Результаты исследования. Для определения искомых коэффициентов жесткости образуем разрезной стержень $\bar{S}^n$ (рис. 2), введя внутренние шарниры на опорах, расположенных в узлах $(n+1)$-й формы. Его спектр содержит КрС его отдельных звеньев как однопролетных стержней, шарнирно опертых по концам на жесткие опоры, и особых КрС, которым отвечают кусочно-линейные формы, в которых эти звенья остаются прямолинейными (рис. 2). Если подобрать коэффициенты $c_0, c_1, \ldots, c_{n+1}$ так, чтобы наименьшая из особых КрС стала равной P_{n+1}, то в спектре стержня $\bar{S}^n$ P_{n+1} будет основной и $(n+2)$ – кратной, которой, кроме кусочно-линейной, отвечают $(n+1)$ форм, в которых деформирован только один из $(n+1)$ пролетов. Устранение разрезов является наложением n связей, в результате которого согласно теореме о наложении связей образуется стержень S^n с двукратной основной КрС, равной P_{n+1}.

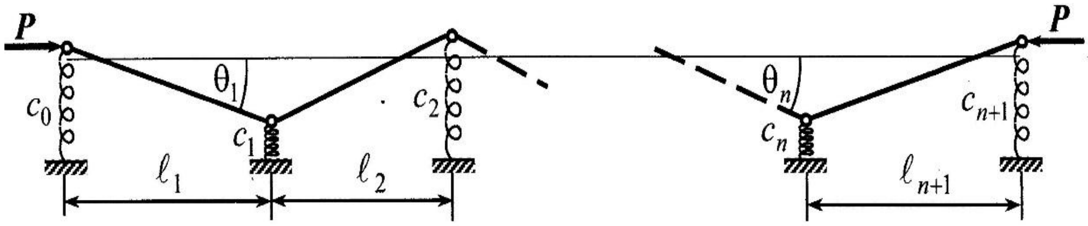

Рис. 2. Стержень $\overline{S}^n$ и его кусочно-линейная форма

При определении особых КрС стержня $\overline{S}^n$ его отдельные звенья можно рассматривать как абсолютно жесткие. Обозначая угол наклона j-го звена при потере устойчивости под действием продольной силы P по одной из особых (кусочно-линейных) форм через θ_j, а вертикальное смещение j-й опоры – через y_j, можем записать уравнения:

$$c_0 y_0 = -P\theta_1, \qquad c_j y_j = P(\theta_j - \theta_{j+1}) \text{ для } j = 1, 2, \ldots, n, \qquad c_{n+1} y_{n+1} = P\theta_{n+1}, \tag{1}$$

выражающие условия равновесия каждого узла, и

$$y_j - y_{j-1} = \ell_j \cdot \theta_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n+1, \tag{2}$$

которое выражает геометрическую связь наклона j-го стержня и смещений его концов.

Исключая из (1) и (2) смещения y_j, придем к линейной однородной системе:

$$\begin{gathered}
\left(\frac{1}{c_0} + \frac{1}{c_1}\right)\theta_1 - \frac{1}{c_1}\theta_2 = \frac{\ell_1}{P}\theta_1 \\
-\frac{1}{c_{j-1}}\theta_{j-1} + \left(\frac{1}{c_{j-1}} + \frac{1}{c_j}\right)\theta_j - \frac{1}{c_j}\theta_{j+1} = \frac{\ell_j}{P}\theta_j \text{ для } j = 2, 3, \ldots, n \\
-\frac{1}{c_n}\theta_n + \left(\frac{1}{c_n} + \frac{1}{c_{n+1}}\right)\theta_{n+1} = \frac{\ell_{n+1}}{P}\theta_{n+1}.
\end{gathered} \tag{3}$$

Особые КрС определяются как корни уравнения:

$$\begin{vmatrix}
\frac{1}{c_0} + \frac{1}{c_1} - \frac{\ell_1}{P} & -\frac{1}{c_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{c_1} & \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} - \frac{\ell_2}{P} & -\frac{1}{c_2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{c_{n-1}} & \frac{1}{c_{n-1}} + \frac{1}{c_n} - \frac{\ell_n}{P} & -\frac{1}{c_n} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{c_n} & \frac{1}{c_n} + \frac{1}{c_{n+1}} - \frac{\ell_{n+1}}{P}
\end{vmatrix} = 0, \tag{4}$$

выражающего условия существования нетривиальных решений системы (3).

Пусть $r_0, r_1, \ldots, r_{n+1}$ произвольный заданный набор положительных чисел. Набор коэффициентов жесткости опор, решающих задачу Бубнова и находящихся в тех же отношениях, что и $\{r_j\}$, можно представить в виде $c_j = c \cdot r_j$, где c – коэффициент, подлежащий определению. Чтобы его найти, подставим $c_j = c \cdot r_j$ в систему (3) и перепишем ее в виде:

$$-\frac{1}{r_{j-1}}\theta_{j-1}+\left(\frac{1}{r_{j-1}}+\frac{1}{r_j}\right)\theta_j-\frac{1}{r_j}\theta_{j+1}=\frac{\ell_j}{(P/c)}\theta_j=\frac{\ell_j}{P^*}\theta_j. \tag{5}$$

Если теперь в уравнение (4) подставить r_j вместо c_j и найти его наименьший корень $P^*_{\min}$, то наименьший корень уравнения (4) будет равен $c\cdot P^*_{\min}$. Потребовав, чтобы он был равен P_{n+1}, найдем:

$$c=P_{n+1}/P^*_{\min}\Rightarrow=c_j=r_j\left(P_{n+1}/P^*_{\min}\right). \tag{6}$$

Замечание. Предложенная схема применима и в том случае, если некоторые из крайних или промежуточных опор будут абсолютно жесткими. В этом случае следует в уравнениях (3) – (5) принять $1/c_j=1/r_j=0$, что не препятствует отысканию $P^*_{\min}$.

При произвольных $r_0, r_1, \ldots, r_{n+1}$ и произвольном распределении изгибной жесткости по длине стержня коэффициент c определяется посредством численного решения уравнения (4) при r_j вместо c_j. В следующем примере благодаря регулярности системы это определение удается выполнить аналитически при произвольном числе n промежуточных опор.

Пример. Определим значения коэффициентов жесткости опор, решающих задачу Бубнова в случае призматического стержня, один из концов которого шарнирно оперт на абсолютно жесткую опору, $c_0=\infty$, а остальные $(n+1)$ опор одинаковы, $c_1=\ldots=c_{n+1}=c$, и расположены на равных расстояниях $\ell_1=\ell_2=\ldots=\ell_{n+1}=\ell$. Система (3) принимает вид:

$$\begin{gathered}(1-\mu)\theta_1-\theta_2=0,\\ -\theta_{j-1}+(2-\mu)\theta_j-\theta_{j+1}=0 \ \text{ для } \ j=2,3,\ldots,n,\\ -\theta_n+(2-\mu)\theta_{n+1}=0,\end{gathered} \tag{7}$$

где $\mu=c\ell/P$.

Решение системы (7) ищем в виде $\theta_j=A\cos j\varphi+B\sin j\varphi$. Для определения постоянных A, B и φ введем две новые неизвестные θ_0 и θ_{n+2}, и дополним систему (7) определяющими их уравнениями:

$$-\theta_0+\theta_1=0,\quad \theta_{n+2}=0, \tag{8}$$

прибавив которые соответственно к первому и последнему уравнениям системы (7), получим $n+1$ уравнений $-\theta_{j-1}+(2-\mu)\theta_j-\theta_{j+1}=0$, имеющих единообразную форму записи для $j=1,2,\ldots,n+1$. Как легко проверить, для $\theta_j=A\cos j\varphi+B\sin j\varphi$ справедливо равенство:

$$\theta_{j-1}+\theta_{j+1}=\theta_j\cdot 2\cos\varphi,$$

что после подстановки в (7) приводит к уравнению $\mu=2(1-\cos\varphi)$. Подстановка $\theta_j=A\cos j\varphi+B\sin j\varphi$ в (8) приводит к системе:

$$\begin{gathered}-A+A\cos\varphi+B\sin\varphi=0;\\ A\cos(n+2)\varphi+B\sin(n+2)\varphi=0,\end{gathered}$$

условием существования нетривиального решения которой является равенство:

$$\begin{vmatrix}-(1-\cos\varphi) & \sin\varphi\\ \cos(n+2)\varphi & \sin(n+2)\varphi\end{vmatrix}=0,$$

которое может быть приведено к виду $\cos(n+3/2)\varphi=0$, откуда находим $n+1$ различных значений φ:

$$\varphi_j = \frac{(2j-1)\pi}{2n+3}, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n+1, \tag{9}$$

которым отвечают $n+1$ особых КрС стержня $\bar{S}^n$, равных $P = \frac{c\ell}{\mu} = \frac{c\ell}{2(1-\cos\varphi_j)}$. Наименьшая из них должна отвечать максимуму знаменателя $1-\cos\varphi_j$, для чего соответствующее значение φ_j должно быть максимально близким к π. Как видно из (9), оно равно:

$$(\varphi_j)_{\max} = \varphi_{n+1} = \frac{(2n+1)\pi}{2n+3} = \pi - \frac{2\pi}{2n+3}, \tag{10}$$

откуда значение коэффициента жесткости, обеспечивающее заданное значение P наименьшей из особых КрС, равно:

$$c = \frac{2P}{\ell}(1-\cos\varphi_{n+1}) = \frac{2P}{\ell}\left(1+\cos\frac{2\pi}{2n+3}\right) = \frac{2P}{\ell}\left(1+\cos\frac{\pi}{n+3/2}\right),$$

а решение соответствующей ОЗБ определяется равенством:

$$c = \frac{2EJ\pi^2}{\ell^3}\left(1+\cos\frac{\pi}{n+3/2}\right). \tag{11}$$

Известны решения ОЗБ для призматического стержня S^n И.Г. Бубнова – для случая абсолютно жестких крайних опор и одинаковых промежуточных – и Я.Л.Нудельмана [5] – для случая одинаковых как крайних, так и промежуточных опор, равные соответственно:

$$c_{\text{Б}} = \frac{2EJ\pi^2}{\ell^3}\left(1+\cos\frac{\pi}{n+1}\right), \quad c_{\text{Н}} = \frac{2EJ\pi^2}{\ell^3}\left(1+\cos\frac{\pi}{n+2}\right).$$

Как видим, найденное решение (11) удовлетворяет неравенствам $c_{\text{Б}} < c < c_{\text{Н}}$, что отражает вполне объяснимое обстоятельство: уменьшение жесткости крайних опор при сохранении КрС должно компенсироваться увеличением жесткости промежуточных.

Выводы. В работе поставлена и решена задача отыскания таких систем коэффициентов жесткости крайних и промежуточных опор многопролетного продольно сжатого стержня, которые обеспечивают максимально возможное при заданном числе опор значение его критической силы. Установлено существование и предложен способ численного определения искомых коэффициентов, находящихся в произвольных наперед заданных отношениях. Полученные результаты могут использоваться при решении задач проектирования и оптимизации инженерных сооружений, содержащих продольно сжатые элементы.

Литература

1. G.I.N. Rozvany, T. Lewiński (eds). Topology Optimization in Structural and Continuum Mechanics / George I. N. Rozvany, Tomasz Lewiński // CISM International Centre for Mechanical Sciences – Springer, 2014. – 471 p.

2. Бекшаев С.Я. Повышение устойчивости стержня за счет изменения длины / С.Я. Бекшаев // «World Science». – Warsaw, Poland, June 2018. – № 6 (34). – Vol. 2. – pp. 12 – 16.

3. Бекшаев С.Я. О влиянии длины стержня на его критические силы / С.Я. Бекшаев // Proceedings of the VII International Scientific and Practical Conference «International Trends in Science and Technology». – Warsaw, Poland, November 30, 2018. – Vol. 1. – pp. 59 – 64.

4. Бубнов И.Г. Строительная механика корабля, ч. 1 / И.Г. Бубнов. – СПб, 1912. – 330 с.

5 Нудельман Я.Л. Устойчивость упруго опертых балок / Я.Л. Нудельман // ПММ, т. 3. – 1939. – №4. – С. 33–48.

6. Нудельман Я.Л. Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем / Я.Л. Нудельман. – М.-Л. ГТТИ, 1949. – 176 с.

References

[1] G.I.N. Rozvany, T. Lewiński (Eds), "Topology Optimization in Structural and Continuum Mechanics", *CISM International Centre for Mechanical Sciences – Springer*, 2014.
[2] S.Ya. Bekshaev, "Povyshenie ustoychivosti sterzhnya za schet izmeneniya dliny", *World Science*, Warsaw, Poland, no. 6 (34), Vol. 2, pp. 12 – 16, 2018.
[3] S.Ya. Bekshaev, "O vliyanii dliny sterzhnya na ego kriticheskie sily", *Proceedings of the VII International Scientific and Practical Conference «International Trends in Science and Technology»*, Warsaw, Poland, Vol. 1, pp. 59 – 64, 2018.
[4] I.G. Bubnov, *Stroitel'naya mekhanika korablya*, v. 1, S.-Pb, 1912.
[5] Ya.L. Nudelman, "Ustoychivost' uprugo opertykh balok", PMM, v. 3, no. 4, pp. 33–48, 1939.
[6] Ya.L. Nudelman, "*Metody opredelenia sobstvennyh chastot i kriticheskih sil dlya sterzhnevyh sistem*". M.-L.: GTTI, 1949.

ПРО РОЗВ'ЯЗКИ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗАДАЧІ БУБНОВА

Бекшаєв С.Я.
Одеська державна академія будівництва та архітектури
fevs@ogasa.org.ua ORCID: 0000-0002-5752-5321

Анотація. Для підвищення критичних сил поздовжньо стисненого стержня можуть встановлюватися додаткові пружні або абсолютно жорсткі шарнірні опори. І. Г. Бубнов сформулював і розв'язав таку задачу: знайти мінімальне значення коефіцієнта жорсткості однакових проміжних шарнірних опор багатопрогонового призматичного стержня (однакове для всіх опор), розташованих на рівних відстанях одна від одної, при якому основна критична сила стрижня, кінці якого шарнірно оперті на абсолютно жорсткі опори, досягає максимально можливого при даному числі опор значення. Передбачається, що поздовжня сила є постійною по довжині стрижня. Пізніше задача Бубнова була узагальнена на стрижні з довільним розподілом згинальної жорсткості і було встановлено, що одне і те ж саме максимальне значення критичної сили можна забезпечити при різних розподілах жорсткості (і матеріалу) між опорами, тобто зменшення жорсткості деяких з опор можливо компенсувати зростанням жорсткості інших. Таким чином, можна ставити задачу вибору серед нескінченної кількості систем опор, що забезпечують максимум критичної сили, такої, яка задовольняла б певним додатковим умовам. У статті пропонується простий прийом, який дозволяє обчислювати коефіцієнти жорсткості опор (включаючи кінцеві), які розв'язують узагальнену задачу Бубнова і при цьому знаходяться між собою в довільних наперед заданих відношеннях. Випадок, коли деякі з опор можуть бути абсолютно жорсткими, не виключається. Задача зводиться до обчислення найбільшого кореня алгебраїчного рівняння, ступінь якого дорівнює числу прогонів стрижня. Цей корінь є власним значенням лінійної алгебраїчної задачі із симетричною тридіагональною матрицею. Для розв'язання таких задач існує багато ефективних прийомів, описаних в літературі. У статті наведено приклад, який ілюструє пропонований підхід і дозволяє зіставити отриманий результат зі знайденими раніше і описаними в літературі. Обгрунтування результатів роботи виконується з використанням якісних методів теорії стійкості стержневих систем, зокрема, теорем про вплив накладення в'язей на критичні сили.

Ключові слова: багатопрогоновий стрижень, стійкість, критична сила, максимум, якісні методи.

ON SOLUTIONS OF THE GENERALIZED BUBNOV PROBLEM

Bekshaev S.Ya.
Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture
fevs@ogasa.org.ua ORCID: 0000-0002-5752-5321

Abstract. To increase the critical forces of the longitudinally compressed rod, additional elastic or absolutely rigid supports can be installed. I.G. Bubnov formulated and solved the following problem: to find the minimum value of the stiffness coefficient of identical intermediate hinge supports of a multi-span prismatic rod (the same for all supports) located at equal distances from each other, at which the main critical force of the rod, whose ends are hinged on absolutely rigid supports, gets the maximum possible value for a given number of supports. The longitudinal force is assumed to be constant along the length of the rod. Later, the Bubnov problem was generalized to rods with an arbitrary distribution of flexural stiffness and it was found that the same maximum value of the critical force can be got with different distributions of stiffness between the supports, i.e. reducing the stiffness of some of them may be offset by increasing the stiffness of others. You can set the task of choosing among an infinite number of support systems providing the maximum of the critical force, one that would satisfy various additional conditions. The article proposes a simple technique that allows one to calculate the stiffness coefficients of the supports (including the end ones) that solve the generalized Bubnov problem, which are in arbitrary predetermined relations among themselves. It does not exclude that some of the supports may be absolutely rigid. The problem reduces to calculating the largest root of an algebraic equation, the degree of which is equal to the number of spans of the rod. This root is an eigenvalue of a linear algebraic problem with a symmetric three-diagonal matrix. To solve such problems, there are many effective techniques described in the literature. The article provides an example that illustrates the proposed approach and allows you to compare the result obtained with results found earlier and described in the literature. The results of the work were obtained using qualitative methods of the theory of stability of rod systems, in particular, theorems on the effect of the imposition of constraints on critical forces.

Keywords: multi-span rod, stability, critical force, maximum, qualitative methods.

Стаття надійшла 30.05.2019