УДК 519.711-519.6 DOI: 10.31650/2415-377X-2022-87-21-31

ДИСПЕРСІЙНИЙ АНАЛІЗ ПОЗДОВЖНІХ ІМПУЛЬСІВ ДЕФОРМАЦІЙ У КАНАТАХ МІНІМАЛЬНОЇ МАСИ ВАНТАЖОПІДЙОМНИХ МЕХАНІЗМІВ КРАНІВ

[1]**Човнюк Ю.В.,** к.т.н., професор,
ychovnyuk@ukr.net, ORCID: 0000-0002-0608-0203
[1]*Національний авіаційний університет*
проспект Любомира Гузара, 1, м. Київ, 03058, Україна
[2]**Чередніченко П.П.**, доцент,
petro_che@ukr.net, ORCID: 0000-0001-7161-661X
[2]**Остапущенко О.П**., к.т.н., доцент,
olga_ost_17@ukr.net, ORCID: 0000-0001-8114-349X
[2]*Київський Національний університет будівництва та архітектури*
Повітрофлотський пр., 31, м. Київ, 03037, Україна

Анотація. У роботі проведений дисперсійний аналіз поздовжніх імпульсів деформацій у канатах мінімальної маси (які до того ж задовольняють умовам рівної міцності у кожному конкретному своєму поперечному перерізі) вантажопідйомних механізмів кранів. Визначені фазова та групова швидкості виникаючих у канатах подібного типу хвилеутворень. Дисперсія імпульсу напружень за способу підйому вантажу “з підхватом”/“з основи” (або “з землі”) досліджена з використанням методу стаціонарної фази.

У роботі використані методи математичної фізики, комплексне перетворення Фур’є по часу, метод стаціонарної фази для обчислення інтегралу, який характеризує деформації у віддаленому полі при його асимптотичному розкладі.

Показано, що асимптотичний розклад зводить аналіз хвильових полів напружень і деформацій, виникаючих у канаті, до використання функцій Ейрі від складного аргументу, знак котрого визначається знаком третьої похідної по хвильовому вектору від частоти коливань вказаних вище полів поблизу стаціонарних точок групової швидкості хвилеутворень (де, відповідно, друга похідна дорівнює нулю).

Встановлено, що функція Ейрі відповідає за відтворення характеру збурень перед та за хвильовим фронтом, який рухається всередині канатної системи. Визначена фазова швидкість, з якою у канаті переноситься площина постійної фази експоненціального множника, що описує просторово-часову залежність виникаючого хвилеутворення. Поблизу фронту імпульсу (навантаження/деформації канату) тривалість останнього збільшується, а його амплітуда зменшується пропорційно кореню кубічному з відстані до точки спостереження. Встановлена формула, за якою повинна будуватись асимптотика розв'язку задачі у випадку наявності екстремуму кривої групової швидкості розповсюдження хвилеутворення у канаті.

Подібний підхід дозволяє досліджувати основні закономірності нестаціонарних хвильових полів, що виникають у канатах вантажопідйомних механізмів кранів.

Отримані у роботі результати можуть слугувати для встановлення кількісних оцінок щодо навантажень та деформацій канатних систем кранів при умові їх швидкоплинності. Подібні навантаження/деформації, як правило, викликають перенапруження вказаних вище систем при підйомі чи спусканні вантажу кранами різних типів (зокрема, мостовими, козловими, портальними), котрі функціонують у робочих режимах (режимах реальної експлуатації), й можуть призвести до аварійних ситуацій (наприклад, розривів канатних систем).

Ключові слова: дисперсія, аналіз, поздовжні імпульси деформацій, канати, мінімальна маса, рівна міцність, вантажопідйомні механізми, крани.

Вступ. При функціонуванні вантажопідйомних механізмів кранів у їх пружних елементах (канатах) виникають хвилеутворення. Ця ситуація притаманна різним типам кранів (козлові, мостові, портальні та ін.), особливо тим, канати котрих мають значну довжину (більше 10м). За різних способів підйому вантажу "з підхватом"/ "з основи" (або "з землі") у таких канатах при перехідних режимах роботи кранів (пуск, гальмування, реверс) можливе виникнення значних напружень/деформацій, що, у свою чергу, призводить до аварійних ситуацій (типу розривів канатів) або ж до пришвидшеного втомлення та наступного їх руйнування. Задля уникнення подібних ситуацій необхідно детально дослідити й проаналізувати закономірності виникнення та основні характеристики таких хвилеутворень.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Алгоритм розрахунку параметрів канату мінімальної маси (який до того ж задовольняє умові рівної міцності у будь-якому своєму поперечному перерізі) наведений у роботах [1-3], автори котрих використали результати [4, 5] й встановили, що площа поперечного перерізу $S(z)$ таких канатів (вісь $0z$ спрямована вподовж осі канату) може бути визначена наступним співвідношенням:

$$S(z) = \frac{F_к}{\sigma_в} \cdot \exp\{\lambda(l - z)\}, \ \lambda = \frac{\rho g}{\sigma_в}, \tag{1}$$

де: $\sigma_в = [\sigma]_p$ − граничне (розривне) значення напружень матеріалу канату у будь-якому його перерізі; $F_к$ − вага канату; ρ − щільність матеріалу канату; g − прискорення вільного падіння (g =9,81 м/с^2); l − довжина канату.

Метою авторських досліджень є створення й обґрунтування методики розрахунку напружень та деформацій у канатах вантажопідйомних кранів за різних способів підйому вантажу. що виникають внаслідок появи нестаціонарних коливань і хвилеутворень у пружних елементах вантажопідйомних механізмів.

Методи досліджень. У роботі використані класичні методи математичної фізики, які застосовуються у аналізі коливань та хвильових процесів, що виникають у системах з розподіленими параметрами й дискретно-континуального типу: 1) комплексне перетворення (пряме та обернене) Фур'є по часу; 2) метод стаціонарної фази (для аналізу інтегралів зі швидко осцилюючою фазою).

Результати дослідження. Введемо заміну просторової координати $z \to x$. Тоді вираз (1) можна подати у формі:

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{F_к}{\sigma_в} \cdot \exp(\lambda l) \cdot \exp(-\lambda x) = S_0 \cdot \exp(-\lambda x); \\ \frac{dS(x)}{dx} &= S'(x) = (-\lambda) \cdot S(x). \end{aligned} \tag{2}$$

Тоді рівняння для переміщень $u(x,t)$, де t − час, пружного типу вподовж осі $0x$ такого стрижня (модель пружного канату вантажопідйомного механізму крана) набуває вигляду [6-11]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{S'(x)}{S(x)} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \ c^2 = E/\rho, \tag{3}$$

де E − модуль пружності матеріалу канату (оскільки обрана стрижнева модель канату); c − швидкість розповсюдження поздовжніх хвилеутворень (пружного типу) у канаті/стрижні. Враховуючи залежності (2), рівняння (3) можна подати наступним чином:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{4}$$

У подальшому рівняння (4) аналізуватимемо та будемо досліджувати методами роботи [9].

Розглянемо напівнескінченний стрижень $(x \ge 0, \ l \to \infty)$, до торця $x = 0$ котрого у момент часу $t=0$ прикладений тиск $p_0 H(t)=\dfrac{mg}{S_0}\cdot H(t)$, де m – маса вантажу; $H(t)$ – функція “стрибка” (Хевісайда), яка задається співвідношенням:

$$H(t)=\begin{cases}1,\ t>0;\\ 0, t\le 0.\end{cases} \tag{5}$$

Тоді гранична умова для рівняння (4) набуває виду:

$$E\cdot\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=-p_0\cdot H(t). \tag{6}$$

Подібна постановка задачі прийнята для випадку, коли вантаж підіймається за допомогою вантажопідйомного крана способом “з підхватом”/“з основи” (“з землі”), а умова $l\to\infty$ прийнята задля того, щоб не враховувати відбиті хвилеутворення від закріпленого кінця канату ($x=l$).

Застосовуючи до рівняння (4) й граничної умови (6) комплексне перетворення Фур’є по часу, за нульових початкових умов:

$$\left.u\right|_{t=0}=0;\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0, \tag{7}$$

матимемо:

$$\frac{d^2U^F}{dx^2}-\lambda\frac{du^F}{dx}+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\cdot u^F=0;\ \left.\frac{du^F}{dx}\right|_{x=0}=-\frac{p_0}{E}\cdot\frac{i}{\omega};\ i^2=-1, \tag{8}$$

де:

$$\begin{cases}u^F(x,\omega)=\displaystyle\int_0^\infty u(x,t)\cdot exp(i\omega t)dt,\\ u(x,t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_L u^F(x,\omega)\cdot\exp(-i\omega t)d\omega,\end{cases} \tag{9}$$

а у якості контуру L у формулі (9) для отримання оригіналу (при зворотному перетворенні Фур’є) можна обрати будь-яку пряму, паралельну дійсній осі, й таку, що проходить вище усіх особливих точок $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n,\ldots$ функції u^F, причому $\mathrm{Im}\,\omega>0$. Остання умова забезпечує збіжність першого інтегралу у (9) для функцій, які зростають не швидше експоненти.

Для того, щоб отримати хвилю, яка йде на ($+\infty$), розв'язок обираємо у (8) у вигляді:

$$u^F=A\exp\left\{\frac{\lambda}{2}x\right\}\cdot\exp\left\{\frac{i\omega x}{c}\left[1-\frac{\lambda^2c^2}{4\omega^2}\right]^{1/2}\right\}. \tag{10}$$

З граничної умови (друге рівняння (8)) маємо:

$$A=-\frac{p_0}{E}\cdot\frac{i}{\omega}\cdot\left\{\frac{\lambda}{2}+\frac{i\omega}{c}\left[1-\frac{\lambda^2c^2}{4\omega^2}\right]^{1/2}\right\}^{-1}, \tag{11}$$

а зображення Фур’є поздовжньої деформації $\varepsilon_x^F=du^F/dx$ є:

$$\varepsilon_x^F=-\frac{p_0}{E}\cdot\frac{i}{\omega}\exp\left\{\left[\frac{\lambda}{2}+\frac{i\omega}{c}\left(1-\frac{\lambda^2c^2}{4\omega^2}\right)^{1/2}\right]x\right\}. \tag{12}$$

Підставляючи отриманий вираз (12) у формулу обернення (9), знаходимо:

$$\varepsilon_x = -\frac{p_0}{E}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{i\delta-\infty}^{i\delta+\infty}\frac{i}{\omega}\exp\left\{-i\omega t+\left[\frac{\lambda}{2}+\frac{i\omega}{c}\left(1-\frac{\lambda^2c^2}{4\omega^2}\right)^{1/2}\right]x\right\}d\omega, \quad (13)$$

де: $\delta > 0$.

Даний інтеграл (13) у явному вигляді обчислити неможливо, тому для аналізу деформацій у віддаленому полі необхідно отримати асимптотичний розклад.

Введемо позначення:

$$\bar{\lambda}(\omega) = \frac{\omega}{c}\cdot\left(1-\frac{\lambda^2c^2}{4\omega^2}\right)^{1/2}, \quad (14)$$

тоді інтеграл (13) можна подати наступним чином:

$$\varepsilon_x = -\frac{p_0}{E}\cdot\frac{1}{2\pi}\exp\left(\frac{\lambda}{2}x\right)\int_{i\delta-\infty}^{i\delta+\infty}\frac{i}{\omega}\cdot\exp\left\{-i\omega t+i\bar{\lambda}(\omega)x\right\}d\omega. \quad (15)$$

Легко показати, що при дійсному значенні ω групова швидкість (V_g) може бути записана наступним чином:

$$V_g = \frac{d\omega}{d\bar{\lambda}} = \left(\frac{d\bar{\lambda}}{d\omega}\right)^{-1}, \quad (16)$$

має єдине стаціонарне значення $V_{gS} = c$ при $\omega \to \infty$, причому це значення є максимумом.

Дійсно, якщо розглянути розв’язок рівняння (4) у вигляді:

$$u(x,t) = \exp\left\{i\left(\bar{\lambda}x-\omega t\right)\right\}, \quad (17)$$

де ω − незалежна змінна (частота кругова хвилеутворення); $\bar{\lambda}$ − хвильовий вектор (у загальному випадку комплексна величина), тобто вважаючи $\bar{\lambda} = \mathrm{Re}\,\bar{\lambda} + i\,\mathrm{Im}\,\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}') + i(\bar{\lambda}''), (\bar{\lambda}', \bar{\lambda}'') > 0$, тоді легко отримати дисперсійне співвідношення між $\bar{\lambda}$ та ω у неявному вигляді:

$$F(\omega,\bar{\lambda}) = 0 \Rightarrow \bar{\lambda}'' = \frac{\lambda}{2}\cdot(-1);\ (\bar{\lambda}')^2+\frac{\lambda^2}{4}-\frac{\omega^2}{c^2} = 0. \quad (18)$$

Звідси:

$$\frac{d\omega}{d\bar{\lambda}'} = \frac{\bar{\lambda}'c^2}{\omega} = \frac{c^2}{\left(\frac{\omega}{\bar{\lambda}'}\right)},\ V_g = \frac{d\omega}{d\bar{\lambda}'},\ V_f = \frac{\omega}{\bar{\lambda}'}, \quad (19)$$

де V_f − фазова швидкість хвилеутворення, тому з (18), (19) маємо:

$$V_g = c^2/V_f,\ V_f^2 = c^2 + c^2\cdot\frac{\lambda^2}{4(\bar{\lambda}')^2}. \quad (20)$$

У далекій польовій зоні: $(\bar{\lambda}'\cdot l) >> 1,\ V_f^2 \to c^2 \Rightarrow V_f = c, V_g = c$.

Отже, при дійсному значенні ω групова швидкість приймає вид ($V_g = c$), а для виразу (14) приймаємо наближене значення:

$$\bar{\lambda}(\omega) = \frac{\omega}{c}\left(1-\frac{\lambda^2c^2}{4\omega^2\cdot 2}\right) = \frac{\omega}{c}\left(1-\frac{\lambda^2c^2}{8\omega^2}\right),\ \frac{\omega l}{c} >> 1. \quad (21)$$

Підставляючи (21) у вираз (15), матимемо:

$$\varepsilon_x = \left(-\frac{p_0}{E}\right)\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\exp\left(\frac{\lambda}{2}\cdot x\right)\cdot\int_{i\delta'-\infty}^{i\delta'+\infty}\frac{i}{\omega}\cdot\exp\left\{-i\omega\cdot\left(t-\frac{x}{c}\right)-\frac{i\omega x}{c}\cdot\frac{\lambda^2c^2}{8\omega}\right\}d\omega. \qquad (22)$$

Виконаємо заміну змінних:

$$\overline{z} = \left(-\frac{3}{4}\cdot\frac{\lambda^2c^4}{2\omega^3l^2}\right)^{1/3}\cdot\left(\frac{x}{l}\right)^{1/3}\cdot\frac{\omega l}{c}, \qquad (23)$$

де l − довжина стрижня/канату (яка завжди має скінченне значення), й, позначаючи:

$$\sigma = \left(-\frac{4}{3}\cdot\frac{2\omega^3l^2}{\lambda^2c^4}\right)^{1/3}\cdot\left(\frac{l}{x}\right)^{1/3}\cdot\frac{(ct-x)}{l}, \qquad (24)$$

отримаємо формулу:

$$\varepsilon_x = \left(-\frac{p_0}{E}\right)\cdot\frac{1}{2\pi}\exp\left(\frac{\lambda}{2}x\right)\int_{i\delta'-\infty}^{i\delta'+\infty}\frac{i}{(\overline{z})}\exp\left\{i\left(\frac{1}{3}\overline{z}^3-\sigma\overline{z}\right)\right\}d\overline{z}, \qquad (25)$$

де δ' − довільне додатне число.

Для обчислення інтегралу знайдемо похідну функції:

$$\Phi(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_{i\delta'-\infty}^{i\delta'+\infty}\frac{i}{(\overline{z})}\exp\left\{i\left(\frac{1}{3}\overline{z}^3-\sigma\overline{z}\right)\right\}d\overline{z} \qquad (26)$$

по змінній σ. Матимемо:

$$\Phi'(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_{i\delta'-\infty}^{i\delta'+\infty}\exp\left\{i\left(\frac{1}{3}\overline{z}^3-\sigma\overline{z}\right)\right\}d\overline{z}. \qquad (27)$$

Порівнюючи останню формулу (27) з представленням функції Ейрі:

$$A_i(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{i\left(\frac{1}{3}\overline{z}^3+\sigma\overline{z}\right)\right\}d\overline{z} \equiv \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\left(\frac{1}{3}\overline{z}^3+\sigma\overline{z}\right)d\overline{z}, \qquad (28)$$

й, враховуючи, що у (27) пряму інтегрування можна зміщувати на вісь $\operatorname{Im}\overline{z}=0$, знаходимо:

$$\Phi'(\sigma) = Ai(-\sigma), \qquad (29)$$

звідки:

$$\Phi(\sigma) = \Phi(0)+\int_0^{\sigma}Ai(-\alpha)\,d\alpha. \qquad (30)$$

Оскільки ε_x обчислюється інтегруванням по дійсній осі, застосування методу стаціонарної фази обґрунтовано.

Знайдемо значення постійної:

$$\Phi(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{i\delta'-\infty}^{i\delta'+\infty}\frac{i}{(\overline{z})}\exp\left(\frac{1}{3}\cdot i\overline{z}^3\right)dz. \qquad (31)$$

Тут шлях інтегрування деформується у контур, який складається з променів $(-\infty,-\varepsilon)$ й $(\varepsilon,+\infty)$ осі $\operatorname{Im}\overline{z}=0$, з'єднаних напівколом малого радіусу ε у верхній напівплощині для обходу полюсу $\overline{z}=0$. Не зупиняючись на подробицях, наведемо результат обчислень: $\Phi(0)=1/3$, [9]. Підставляючи це значення у (30), а потім у (25), остаточно отримаємо:

$$\varepsilon_x = \left(-\frac{p_0}{E}\right)\exp\left(\frac{\lambda}{2}x\right)\cdot\left[\frac{1}{3}+\int_0^{\sigma} Ai(-\alpha)d\alpha\right]. \quad (32)$$

Для імпульсу напруження $\tilde{\sigma}_x = E\varepsilon_x$ отримаємо, відповідно:

$$\tilde{\sigma}_x = (-p_0)\exp\left(\frac{\lambda}{2}x\right)\cdot\left[\frac{1}{3}+\int_0^{\sigma} Ai(-\alpha)d\alpha\right]. \quad (33)$$

Асимптотичний розв'язок суттєво відрізняється від отриманого за елементарною теорією розв’язку хвильового рівняння (4) за тих самих початкових і граничних умов. Елементарне (бездисперсійне) рішення $\varepsilon_x^{(0)}$ має той самий вид, що й імпульс навантаження (деформаційного):

$$\varepsilon_x^{(0)} = -\frac{p_0}{E}\exp\left(\frac{\lambda}{2}x\right)\cdot H\left(t-\frac{x}{c}\right). \quad (34)$$

Якщо ввести позначення змінних:

$$\frac{ct-x}{l}=\tau,\ \frac{x}{l}=X,\ \left(-\frac{4}{3}\cdot\frac{2\omega^3 l^2}{\lambda^2 c^4}\right)^{1/3}=\bar{\bar{m}},\ \tilde{\varepsilon}_x=-\frac{E}{p_0}\varepsilon_x, \quad (35)$$

після чого формули (32), (34) набувають вигляду:

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon}_x = \left[\dfrac{1}{3}+\displaystyle\int_0^{\left(\bar{\bar{m}}X^{-1/3}\tau\right)} Ai(-\alpha)d\alpha\right]\exp\left(\dfrac{\lambda}{2}\cdot l\cdot X\right), \\ \tilde{\varepsilon}_x^{(0)} = \exp\left(\dfrac{\lambda}{2}\cdot l\cdot X\right)\cdot H(\tau). \end{cases} \quad (36)$$

Чисельний розрахунок на ПЕОМ за співвідношеннями (36) (для $\tilde{\sigma}_x/\tilde{\sigma}_x^{(0)}$ буде теж саме) дає при: $X=X_1$, де X_1 − довільна лінійна величина більша у порівнянні з l, $\tilde{\varepsilon}_x/\tilde{\varepsilon}_x^{(0)} \approx 1{,}33$ для максимального значення $\tilde{\varepsilon}_x$ при певному значенні аргументу ($\bar{\bar{m}}\cdot X_1^{-1/3}\cdot\tau$).

Розглянемо далі більш загальний випадок. Для цього використаємо співвідношення (14) й подамо інтеграл (15) у наступному вигляді:

$$\varepsilon_x = \left(-\frac{p_0}{E}\right)\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\right)\exp\left(\frac{\lambda}{2}x\right)\cdot i\int_a^b F\left(\bar{\lambda}\right)\exp\left\{ix\cdot h\left(\bar{\lambda}\right)\right\}d\bar{\lambda}, \quad (37)$$

де: $h\left(\bar{\lambda}\right)=\bar{\lambda}-\dfrac{\omega t}{x}$; $F\left(\bar{\lambda}\right)=\dfrac{\bar{\lambda}}{\left(\bar{\lambda}^2+\dfrac{\lambda^2}{4}\right)}$; (a,b) − деякі сталі, у якості межі інтегрування по $\bar{\lambda}$, що відповідають межам інтегрування по ω в (15). До речі, $\omega\left(\bar{\lambda}\right)=c\left(\bar{\lambda}^2+\lambda^2/4\right)^{1/2}$. При цьому, $\omega\left(\bar{\lambda}\right)$ й $F\left(\bar{\lambda}\right)$ дійсні функції свого аргументу $\bar{\lambda}$.

Як правило, інтеграли типу (37) у явному виді не обчислюються. Однак у деяких практично важливих випадках для них можуть бути отримані асимптотичні розклади, що дозволяють досліджувати основні закономірності нестаціонарних хвильових полів.

У подальшому розглядаємо лише інтеграл у (37):

$$I(x,t)=\int_a^b F\left(\bar{\lambda}\right)\exp\left\{ix\cdot h\left(\bar{\lambda}\right)\right\}d\bar{\lambda}. \quad (38)$$

При досить великих x, для гладких $F\left(\bar{\lambda}\right)$ підінтегральний вираз являє собою швидко осцилюючу функцію від $\bar{\lambda}$, тому внески у інтегральну суму додатніх та від'ємних напівперіодів взаємно знищуються. Суттєвий внесок у інтеграл вноситься лише околами точок, в котрих фазовий множник має стаціонарне значення, тобто: $dh\left(\bar{\lambda}\right)/d\bar{\lambda}=0$. Ця умова приводить до рівності:

$$\frac{d\omega}{d\bar{\lambda}}=\frac{x}{t}. \tag{39}$$

Позначимо знайдене з рівняння (39) значення $\bar{\lambda}$ через $\bar{\lambda}_S$, а відповідне йому значення ω − через ω_S. Похідна у лівій частині (39) має розмірність швидкості й називається груповою швидкістю (V_g):

$$V_g=\frac{d\omega}{d\bar{\lambda}}=\frac{c\bar{\lambda}}{\left(\bar{\lambda}^2+\lambda^2/4\right)^{1/2}}, \tag{40}$$

при $V_g=\alpha\cdot c$, де $0<\alpha<1$, $\bar{\lambda}_S$ обчислюється зі співвідношення:

$$\bar{\lambda}_S=\frac{\lambda}{2\left(\dfrac{1}{\alpha^2}-1\right)^{1/2}}. \tag{41}$$

Для ω_S відповідно маємо:

$$\omega_S=c\left(\bar{\lambda}_S^2+\lambda^2/4\right)^{1/2}. \tag{42}$$

З (39) випливає, що за заданих x великих значень й t основний внесок у інтеграл дає малий окіл точки $\lambda=\bar{\lambda}_S$, що визначається з (39), (40), (41). Оскільки $t>0$, тоді підінтегральний вираз у (38) буде мати точки стаціонарної фази для додатніх x, якщо $V_g>0$.

У відповідності із зазначеним вище, вираз (38) при великих x еквівалентний інтегралу по малому околу точки $\bar{\lambda}_S$:

$$I(x,t)=F\left(\bar{\lambda}_S\right)\cdot\int\limits_{\bar{\lambda}_S-\varepsilon}^{\bar{\lambda}_S+\varepsilon}\exp\left\{i\left(\bar{\lambda}x-\omega t\right)\right\}d\bar{\lambda},\quad \varepsilon>0. \tag{43}$$

Розкладаючи $\omega\left(\bar{\lambda}\right)$ у ряд Тейлора у околі точки $\bar{\lambda}=\bar{\lambda}_S$, із урахуванням (39)-(41), матимемо:

$$\begin{cases}\omega=\omega_S+\dfrac{x}{t}\left(\bar{\lambda}-\bar{\lambda}_S\right)+\dfrac{1}{2}\omega_S''\left(\bar{\lambda}-\bar{\lambda}_S\right)^2,\omega_S''=\left.\dfrac{d^2\omega}{d\bar{\lambda}^2}\right|_{\bar{\lambda}=\bar{\lambda}_S}, \\ \omega_S''=\dfrac{\lambda^2}{4\left(\bar{\lambda}_S^2+\dfrac{\lambda^2}{4}\right)^{3/2}}.\end{cases} \tag{44}$$

Зазначимо, що величина ε у (43) є невизначеною. Однак з попередніх міркувань випливає, що проміжки інтегрування, що не мають у своєму складі точки $\bar{\lambda}_S$, не вносять суттєвих внесків у інтеграл (43). Тому з метою спрощення асимптотичних формул, інтегрування у (43) можна розповсюдити на усю числову вісь. Підставляючи (44) у (43), матимемо:

$$I=F(\bar{\lambda}_S)\exp\left\{i\left(\bar{\lambda}_S-\omega_S t\right)\right\}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{i}{2}\cdot\omega_S''t\left(\bar{\lambda}-\bar{\lambda}_S\right)^2\right\}d\bar{\lambda}. \tag{45}$$

Використовуючи відомий інтеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{i}{2}\bar{a}\cdot\bar{\lambda}^2\right)d\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{2\pi}{\bar{a}}}\cdot\exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right), \tag{46}$$

Остаточно маємо при $\omega_S'' > 0$:

$$I = F(\bar{\lambda}_S)\cdot\sqrt{\frac{2\pi}{\omega_S'' t}}\cdot\exp\left\{i\left[\bar{\lambda}_S x - \omega_S t - \frac{\pi}{4}\right]\right\}, \tag{47}$$

а при $\omega_S'' < 0$, відповідно:

$$I = F\left(\bar{\lambda}_S\right)\cdot\sqrt{\frac{2\pi}{\left(-\omega_S'' t\right)}}\cdot\exp\left\{i\left[\bar{\lambda}_S x - \omega_S t + \frac{\pi}{4}\right]\right\} \tag{48}$$

Поблизу точок, де $\omega_S'' = 0$, тобто поблизу стаціонарних точок групової швидкості, отримане представлення перестає бути справедливим. Такі точки $\bar{\lambda}_S$ визначаються з рівняння:

$$\frac{dV_g}{d\bar{\lambda}} = \frac{d^2\omega}{d\bar{\lambda}^2} = 0, \tag{49}$$

і в цьому випадку $\bar{\lambda}_S$ не залежать від x та t. Розклад, який використовується замість (44), має вид:

$$\begin{cases} \omega = \omega_S = V_{gS}\cdot\left(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_S\right) + \dfrac{\omega_S'''}{6}\cdot\left(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_S\right)^3, \\ V_{gS} = \left.\dfrac{d\omega}{d\bar{\lambda}}\right|_{\bar{\lambda}=\bar{\lambda}_S} = \dfrac{c\bar{\lambda}_S}{\left(\bar{\lambda}_S^2 + \dfrac{\lambda^2}{4}\right)^{1/2}}, \\ \omega_S''' = \left.\dfrac{d^3\omega}{d\bar{\lambda}^3}\right|_{\bar{\lambda}=\bar{\lambda}_S} = \dfrac{(-3)\lambda^2\bar{\lambda}_3}{4}\cdot\left(\bar{\lambda}_S^2 + \dfrac{\lambda^2}{4}\right)^{-5/2}. \end{cases} \tag{50}$$

Підставляючи у (43), матимемо:

$$I = F(\bar{\lambda}_S)\exp\left\{i\left(\bar{\lambda}_S x - \omega t\right)\right\}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{i\left(x - V_{gS}t\right)\bar{\lambda} - \frac{\omega_S''' t}{6}\bar{\lambda}^3\right\}d\bar{\lambda}. \tag{51}$$

Зробимо заміну змінної інтегрування за формулою:

$$\frac{1}{3}\tilde{z}^3 = -\frac{\omega_s''' t}{6}\cdot\bar{\lambda}^3, \tag{52}$$

після чого, вважаючи поки що $\omega_S''' < 0$, перетворимо інтеграл у (51) до виду:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{i\left(\frac{1}{3}\tilde{z}^3 + \bar{\sigma}\tilde{z}\right)\right\}d\tilde{z}, \tag{53}$$

де:

$$\bar{\sigma} = \left(\frac{2}{\omega_S''' t}\right)^{1/3}\cdot\left(V_{gS}t - x\right). \tag{54}$$

Інтеграл (53) може бути виражений через функцію Ейрі першого роду (28). Диференціюючи під знаком інтегралу, можна впевнитись, що вона задовольняє рівнянню:

$$\frac{d^2 Ai\left(\bar{\sigma}\right)}{d\left(\bar{\sigma}\right)^2} - \bar{\sigma}Ai\left(\bar{\sigma}\right) = 0. \tag{55}$$

Порівнюючи останнє рівняння (55) з рівнянням:

$$\frac{d^2y}{d(\bar{\sigma})^2}-\tilde{a}y=0,\ (\tilde{a}=const), \tag{56}$$

можна припустити, що при від'ємних $\bar{\sigma}$ функція $Ai(\bar{\sigma})$ буде осцилюючою, а при додатніх $\bar{\sigma}$ буде мати властивості експоненти. Це дійсно так! Зазначимо, що зі зростанням абсолютної величини від'ємного аргументу функції Ейрі частота осциляцій зростає, а їх амплітуда зменшується.

Таким чином, при $\omega_S''' < 0$ (51) подається формулою:

$$I=\left(-F(\bar{\lambda}_S)\right)\cdot\exp\left\{i\left(\bar{\lambda}_S x-\omega_S t\right)\right\}\cdot\left(\frac{2}{\omega_S''' t}\right)^{1/3}\cdot 2\pi\cdot Ai\left\{\left(\frac{2}{\omega_S''' t}\right)^{1/3}\cdot\left(V_{gS}t-x\right)\right\}. \tag{57}$$

Для додатніх ω_S''' слід врахувати зміну напрямку інтегрування, викликану заміною (52). Об'єднуючи обидва випадки, матимемо:

$$I=2\pi F\left(\bar{\lambda}_S\right)\exp\left\{i\left(\bar{\lambda}_S x-\omega_S t\right)\right\}\cdot\left(\frac{2}{|\omega_S'''|t}\right)^{1/3}\cdot Ai\left[\left(\frac{2}{\omega_S''' t}\right)^{1/3}\cdot\left(V_{gS}t-x\right)\right]. \tag{58}$$

Аналіз формули (58) дозволяє зробити наступні висновки.

Висновки:

1. Знак аргументу функції Ейрі визначається знаком виразу $\omega_S'''\left(V_{gS}t-x\right)$. Тому, якщо $\omega_S''' < 0$ (групова швидкість V_g має максимум), функція Ейрі буде осцилюючою при $t > x/V_{gS}$ й затухаючою у протилежному випадку. Тут можна вести мову про "прибуваючу" моду перед фронтом котрої $x > V_{gS}t$, який рухається зі швидкістю V_{gS}, збурення швидко спадають до нуля. При $\omega_S''' > 0$ (мінімум V_g) вже задній фронт імпульсу рухається зі швидкістю $c = V_{gS}$. Таким чином, функція Ейрі відповідає за відтворення характеру збурень перед й за фронтом, який рухається зі швидкістю V_{gS}.

2. Площина постійної фази експоненціального співмножника $\left(\bar{\lambda}_S x-\omega_S t\right)=const$ переноситься з фазовою швидкістю:

$$V_f=\frac{x}{t}=\frac{\omega_S}{\bar{\lambda}_S}=\frac{c}{\bar{\lambda}_S}\cdot\left(\bar{\lambda}_S^2+\frac{\lambda^2}{4}\right)^{1/2}. \tag{59}$$

3. Асимптотика (58) справедлива поблизу фронту імпульсу (навантаження/деформації) $x=V_{gS}t$, оскільки з умови стаціонарності фази із урахуванням розкладу (50) випливає $\left|V_{gS}t-x\right| << X$. Наявність множників $(t)^{-1/3}$ свідчить про те, що тривалість імпульсу збільшується, а його амплітуда зменшується пропорціонально кореню кубічному з відстані до точки спостереження.

4. Отримані два різновиди асимптотик для інтегралу (38), котрі визначаються формулами (47), (48) та (58). Виникає слушне запитання: якими формулами слід користуватись при розв'язуванні конкретних задач.

Слід підкреслити важливу відмінність між асимптотиками двох типів. У першому – точка стаціонарної фази визначається за значеннями x та t, а у другому − незалежно від них. Крім того, величина (47) чи (48) спадає як $(t)^{-1/2}$ або, що є тим самим, як $x^{-1/2}$. Для (58) характерний закон спадання $x^{-1/3}$, тому важливість асимптотики, яка відповідає екстремуму групової швидкості V_g, при $x \to \infty$ зростає. Отже, якщо крива групової швидкості має екстремум, асимптотика повинна будуватись за формулою типу (58).

5. Зазначимо ще одну обставину. Інтеграл (38) по формі представляє обернене перетворення Фур'є за змінною x. Як правило, він є дійсною величиною. Отримані нами асимптотики − комплексні функції. Це уявне протиріччя не має місця у конкретних задачах. Врахування конкретних властивостей функцій F та ω завжди дає для дійсних інтегралів такі ж дійсні асимптотичні представлення.

Література

1. Оборский Г.А., Дащенко А.Ф., Усов А.В., Дмитришин Д.В. Моделирование систем. Одесса: Астропринт, 2013. 664 с.
2. Усов А.В., Дубров А.Н., Дмитришин Д.В. Моделирование систем с распределенными параметрами. Одесса: Астропринт, 2003. 682 с.
3. Усов А.В., Дмитришин Д.В., Морозов Ю.А., Дубров К.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения и их приложение. Одесса: Астропринт, 2005. 496 с.
4. Эндрюс Дж., Мак-Лоун Р. Математическое моделирование. М.: Мир, 1979. 234 с.
5. Ведров С.С. Колебания металлорежущих станков. М.: Машиностроение, 2000. 199 с.
6. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 712 с.
7. Подураев В.Н. Анализ динамики механических систем. М.: Высшая школа, 1989. 340 с.
8. Тихонов А.И., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.
9. Жарий О.Ю., Улитко А.Ф. Введение в механику нестационарных колебаний и волн. К.: Вища школа, 1989. 184 с.
10. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 736 с.
11. Мусій Р.С., Оришин О.Г., Зашкільняк І.М., Клапчук М.І. Диференціальні рівняння та рівняння математичної фізики. Львів: Растр-7, 2018. 250 с.

References

[1] H.A. Oborskyi, A.F. Dashchenko, A.V. Usov, D.V. Dmytryshyn, *Modelyrovanye system*. Odessa: Astroprynt, 2013.

[2] A.V. Usov, A.N. Dubrov, D.V. Dmytryshyn, *Modelirovanie sistem s raspredelennymi parametrami*. Odessa: Astroprynt, 2003.

[3] A.V. Usov, D.V. Dmytryshyn, Yu.A. Morozov, K.A. Dubrov, *Obyknovennye differencial'nye uravneniya i ih prilozhenie*. Odessa: Astroprynt, 2005.

[4] Dzh. Эndrius, R. Mak-Loun, *Matematycheskoe modelyrovanye*. M.: Myr, 1979.

[5] S.S. Vedrov, *Kolebanyia metallorezhushchykh stankov*. M.: Mashynostroenye, 2000.

[6] N.S. Koshliakov, E.B. Gliner, M.M. Smyrnov, *Uravneniya v chastnyh proizvodnyh matematicheskoj fiziki*. M.: Vysshaya shkola, 1970.

[7] V.N. Poduraev, *Analyz dynamyky mekhanycheskykh system*. M.: Vysshaya shkola, 1989.

[8] A.Y. Tykhonov, A.A. Samarskyi, *Uravnenyia matematycheskoi fyzyky*. M.: Nauka, 1972.

[9] O.Iu. Zharyi, A.F. Ulytko, *Vvedenie v mekhaniku nestacionarnyh kolebanij i voln*. K.: Vyshcha shkola, 1989.

[10] A.P. Fylyppov, *Kolebaniya deformiruemyh sistem*. M.: Mashynostroenye, 1970.

[11] R.S. Musii, O.H. Oryshyn, I.M. Zashkilniak, M.I. Klapchuk, *Dyferentsialni rivniannia ta rivniannia matematychnoi fizyky*. Lviv: Rastr-7, 2018.

DISPERSION ANALYSIS OF LONGITUDINAL DEFORMATION PULSES IN MINIMUM MASS ROPES OF CRANES LOAD LIFTING MECHANISMS

[1]**Chovnyuk Y.V**., PhD, Professor of ISA,
ychovnyuk@ukr.net, ORCID: 0000-0002-0608-0203
[1]*National Aviation University*
Ljubomir Guzar prospect, 1, Kyiv, 03058, Ukraine
[2]**Cherednichenko P.P.**, Associate Professor,
petro_che@ukr.net, ORCID: 0000-0001-7161-661X
[2]**Ostapuschenko O.P.**, PhD, Associate Professor,
olga_ost_17@ukr.net, ORCID: 0000-0001-8114-349X
[2]*Kyiv National University of Construction and Architecture*
Povitroflotsky prospect, 31, Kyiv, 03037, Ukraine

Abstract. Dispersion analysis of longitudinal deformation pulses in minimum mass ropes of cranes load lifting mechanisms (which satisfy the conditions of equal strength in each specific cross section) is carried out in the article. The phase and group waveform velocities occurring in the ropes of this type are determined. The impulse dispersion by the method of lifting the load "with the pickup"/"from the base" ("from the ground") was investigated using the stationary phase method.

Such methods are used in this work as: 1) classic methods of mathematical physics; 2) complex Fourier transform over time; 3) stationary phase method for the calculation of the integral which characterizes the deformations in the remote field during its asymptotic schedule.

It is shown that the asymptotic schedule reduces the analysis of stress and deformation wave fields arising in the rope to the using of the Airy function with a complex argument. The sign of this argument is determined by the sign of the third derivative of the frequency by the wave vector for mentioned above fields near stationary points of the group velocity of wave formations (hear, in accordance, the second derivative is equal to zero).

It is substantiated that Airy function is responsible for reproducing the nature of perturbations before and after the wave front moving inside the rope system. The phase velocity with which the constant phase plane of the exponential multiplier is carried in the rope is determined. This multiplier the spatial-temporal dependence of the emerging waveform describes. Near the pulse front (load/deformation of the rope), its duration increases, but the amplitude decreases in proportion to the cubic root of the distance to the observation point. The formula is established, according to which the asymptotic of this problem solution should be built, in the case of the curve extreme of waveform propagation group velocity in the rope.

A similar approach gives the possibility to explore the main patterns of no stationary wave fields generated in the ropes of cranes load lifting mechanisms.

The results obtained in the work can be used for establishing cranes rope systems loads and deformations quantities estimates under the condition of their transience. Such loads/deformations usually cause of the above systems overstrain when lifting or lowering loads with different types cranes (particularly, bridge, gantry, portal), which work in operation modes (real operation mode) and can lead to emergencies (for example, breaks in rope systems).

Keywords: dispersion, analysis, longitudinal deformation pulses, ropes, minimum mass, equal strength, load lifting mechanisms, cranes.

Стаття надійшла до редакції 15.05.2022