

АНАЛІТИЧНИЙ РОЗРАХУНОК БАЛКИ, ЩО ОПИРАЄТЬСЯ НА ПРУЖНУ ОСНОВУ ВІНКЛЕРА З ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОЮ НЕОДНОРІДНІСТЮ

¹**Крутий Ю.С.**, д.т.н., професор,
yurii.krutii@gmail.com, ORCID: 0000-0001-7105-3087

¹**Сур'янінов М.Г.**, д.т.н., професор,
sng@ogasa.org.ua, ORCID: 0000-0003-2592-5221

¹**Перпері А.О.**, к.т.н., доцент,
a.perperi@odaba.edu.ua, ORCID: 0000-0001-7112-6864

¹**Вакуленко В.В.**, аспірант,
91vzv19@gmail.com, ORCID: 0009-0008-4410-7666

¹**Теорло Н.А.**, аспірантка,
nata.teorlo@gmail.com, ORCID: 0009-0003-3013-9468

¹*Одеська державна академія будівництва та архітектури*
вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, 65029, Україна

Анотація. Робота націлена на подальший розвиток аналітичних методів розрахунку на згин балок, що опираються на неоднорідну суцільну пружну основу Вінклера. У даній роботі розглядається випадок, коли балка знаходиться під впливом параболічно-змінного поперечного навантаження, а неоднорідність пружної основи задається експоненціальною функцією. В явній замкнутій формі виписані фундаментальні функції та частинний розв'язок відповідного диференціального рівняння згину балки. Дані функції є безрозмірними та представляються абсолютно і рівномірно збіжними степеневими рядами. В свою чергу, через вказані функції виражаються формули для параметрів напружено-деформованого стану балки – прогину, кута повороту, згинального моменту та поперечної сили. Невідомі константи інтегрування в цих формулах виражені через початкові параметри, які знаходяться після реалізації заданих граничних умов. Тим самим, розрахунок балки на згин зводиться до процедури чисельної реалізації явних аналітичних формул для параметрів напружено-деформованого стану.

На прикладі продемонстровано практичне застосування отриманих розв'язків. Розглянуто призматичну бетонну балку, що опирається на експоненціально-змінну пружну основу. Результати розрахунку авторським методом представлені в чисельному та графічному форматах для випадку, коли обидва кінці балки закріплені. Отримані авторським методом чисельні значення трактуються як точні, оскільки застосований метод розрахунку ґрунтується на точному розв'язку відповідного диференціального рівняння. Наявність таких розв'язків дозволяє шляхом порівняння оцінювати точність розв'язків, отриманих за допомогою різного роду наближених методів. З метою такого порівняння, в роботі надано результати розрахунку, що отримані методом скінченних елементів (МСЕ). Визначено абсолютну похибку МСЕ при розрахунку даної конструкції.

Ключові слова: балка, неоднорідна пружна основа, експоненціальна неоднорідність, гіпотеза Вінклера, точний розв'язок, аналітичний розрахунок.

Вступ. Конструкція, що являє собою балку на пружній основі, часто застосовується в інженерній практиці, в тому числі, в промисловому та цивільному будівництві, в залізничній галузі, гідротехніці, кораблебудуванні, аерокосмічній техніці та інших.

З числа існуючих моделей пружної основи широкого поширення набула так звана модель Вінклера. У цій моделі пружна основа, на яку опирається конструкція, представляється у вигляді набору вертикальних, близько розташованих, не пов'язаних між собою пружин. Таку ситуацію загалом можна описати єдиним параметром, який називають

модулем пружності основи чи коефіцієнтом постелі. У найпростішому випадку, коли пружна основа вважається однорідною, коефіцієнт постелі є сталим, що суттєво спрощує розв'язання відповідного диференціального рівняння згину балки. Цим можна пояснити широко вживане припущення про однорідність основи. Однак загальновідомо, що таке припущення далеке від реальності і для більш якісних досліджень необхідно враховувати неоднорідність (змінність) основи [1]. В такому випадку коефіцієнт постелі буде змінним уздовж осі балки, що суттєво ускладнює розв'язання відповідного диференціального рівняння. Тому в подібних ситуаціях для розв'язання задачі часто застосовують різного роду наближені методи.

Дана робота присвячена аналітичному розрахунку балки на згин у випадку, коли неоднорідність пружної основи описується експоненціальною функцією.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Попри велику кількість публікацій, присвячених розрахунку балок на пружній основі, тільки невелика кількість з них присвячена випадку змінного коефіцієнту постелі. Вперше такий випадок було представлено в монографії [2]. Автор монографії розглянув однорідну балку на пружній основі з лінійно-змінним коефіцієнтом постелі та отримав відповідний розв'язок, спираючись на теорію рядів Тейлора. У статті [3] розглянуто випадок, коли коефіцієнт постелі є степеневою функцією координати. Однак аналітичний розв'язок отримано тільки для випадку, коли степінь дорівнює 1. Для інших позитивних значень степеня розроблено чисельну методику розв'язання. Авторами [4] запропоновано аналітичний метод розрахунку балок на неоднорідних ґрунтах, що супроводжується відповідною чисельною схемою. В якості інструментарію досліджень тут залучено теорію функцій Гріна, що дозволило звести вихідну задачу до системи інтегральних рівнянь. Після дискретизації, дані рівняння розв'язуються чисельно за квадратурною схемою Гаусса-Лежандра. В роботі [5] розглядається випадок лінійно-змінного коефіцієнта постелі. Аналітичний розв'язок відповідного диференціального рівняння згину балки тут отримано в явній замкнутій формі в термінах узагальнених гіпергеометричних функцій. Публікацію [6] присвячено тонким балкам на неоднорідній основі Вінклера. Для розв'язку відповідного диференціального рівняння тут застосовується метод скінченних різниць. Автори [7] за допомогою методу гомотопічного аналізу отримали нові аналітичні розв'язки для статичного прогину анізотропних композитних балок, що спираються на пружну основу змінної жорсткості. Зокрема, розглянуто випадок, коли коефіцієнт постелі змінюється за лінійним законом.

Детальний огляд робіт про згин балок, що опираються на пружну основу Вінклера, надано в публікаціях [8, 9]. Автори [8] після відповідного аналізу констатують, що в науковій періодиці відсутні роботи, які стосуються аналітичних розв'язків задачі про згин балки, коли коефіцієнт постелі є змінним, окрім випадків, коли він задається лінійною функцією. В цій же роботі знайдено аналітичний розв'язок для окремого випадку, коли коефіцієнт постелі змінюється за біноміальним законом з показником степеня – 4. В цілому, після огляду низки публікацій, автори [9] приходять до висновку, що у випадку змінного коефіцієнту постелі дослідники найчастіше застосовують МСЕ.

Отже, розробка аналітичних методів розрахунку балок, що опираються на неоднорідну пружну основу, є актуальною науковою проблемою. Вирішенню даної проблеми присвячено низку публікацій [10-12]. Зокрема, в роботі [10] розроблено аналітичний метод розрахунку балок, що опираються на суцільну пружну основу Вінклера, коли погонний коефіцієнт постелі $k(x)$ та навантаження $q(x)$ задаються довільними неперервними функціями, а згинальна жорсткість EI вважається сталою. Метод ґрунтується на точному розв'язку відповідного диференціального рівняння згину балки:

$$EI y''''(x) + k(x)y(x) = q(x). \quad (1)$$

Спираючись на результати [10], в роботах [11, 12] розглянуто два конкретні випадки для змінного коефіцієнту постелі. Так в публікації [11] неоднорідність пружної основи задається степеневою функцією з довільним невід'ємним показником степеня. При цьому поперечне навантаження на балку вважається сталим. В якості прикладу розглянуто балку, що опирається на кубічно-змінну пружну основу. В статті [12] коефіцієнт постелі змінюється за параболічним законом, а діюче на балку змінне навантаження задано лінійним законом.

Результати розрахунків в обох випадках представлені в чисельному та графічному форматах. Для порівняння, надані також результати розрахунків, що отримані МСЕ. Визначено похибку МСЕ при розрахунках даних конструкцій.

Дану роботу автори позиціонують як черговий крок на шляху розвитку аналітичних методів розрахунку. Вона є логічним продовження досліджень, започаткованих в статтях [10-12].

Мета та завдання. Мета дослідження – подальший розвиток аналітичних методів розрахунку балок, що опираються на неоднорідну суцільну пружну основу Вінклера.

Завдання дослідження:

- виконати аналітичний розрахунок реальної балочної конструкції, що опирається на неоднорідну експоненціально-змінну пружну основу, авторським методом (АМ) та МСЕ;
- визначити похибку МСЕ при розрахунку даної конструкції.

Матеріали та методика дослідження. Для досліджень тут застосовується раніше розроблений в [10] АМ розрахунку. При розробці АМ суттєвим чином використовувались теорія функціональних рядів та теорія звичайних диференціальних рівнянь. АМ ґрунтується на точному розв’язку диференціального рівняння згину балки в узагальненому випадку неперервно-змінних коефіцієнтів. В свою чергу, точний розв’язок знайдено методом прямого інтегрування, який розвинуто в роботах [13-15].

Результати досліджень. Об’єктом дослідження є балка сталої згинальної жорсткості EI , що опирається на неоднорідну суцільну пружну основу Вінклера та знаходиться під впливом змінного неперервно-розподіленого поперечного навантаження (рис. 1).

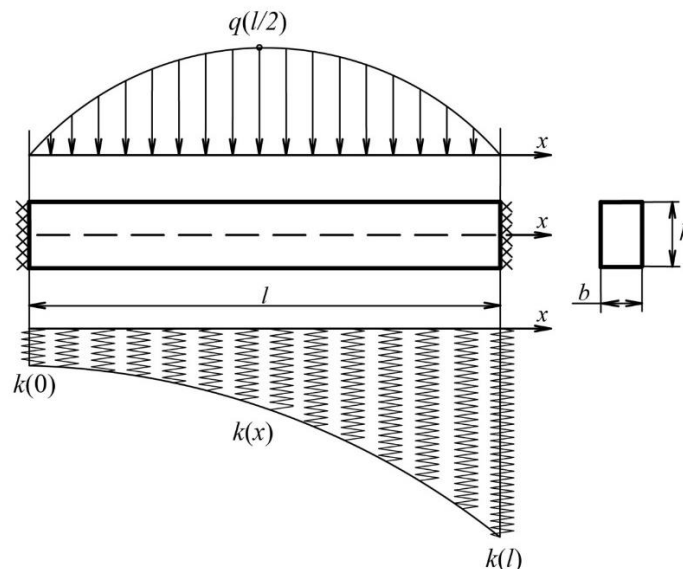


Рис. 1. Розрахункова схема балки

Коефіцієнт постелі змінюється за експоненціальним законом:

$$k(x) = k(0) \exp\left(\delta \frac{x}{l}\right), \quad \delta = \ln \frac{k(l)}{k(0)}, \quad (2)$$

а діюче на балку навантаження вважається параболічно-змінним:

$$q(x) = 4q(l/2) \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right), \quad q(l/2) \neq 0. \quad (3)$$

В роботі [10] для коефіцієнта постелі $k(x)$ та навантаження $q(x)$ прийняті подання:

$$k(x) = k_0 B(x); \quad q(x) = q_0 C(x), \quad (4)$$

де k_0, q_0 – відповідно значення погонного коефіцієнту постелі та навантаження у певній характерній точці балки; $B(x), C(x)$ – безрозмірні неперервні функції, які виражають закони зміни погонного коефіцієнту постелі та розподіленого навантаження уздовж довжини балки.

Отже, безпосередньо з формул (2)-(4), для випадку що розглядається матимемо:

$$k_0 = k(0), \quad B(x) = \exp\left(\delta \frac{x}{l}\right), \quad q_0 = 4q(l/2), \quad C(x) = \frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l}\right)^2. \quad (5)$$

Для дослідження згину балки в [10] отримані наступні формули для прогину $y(x)$, кута повороту $\varphi(x)$, згинального моменту $M(x)$ та поперечної сили $Q(x)$:

$$y(x) = y(0)X_1(x) + \varphi(0)lX_2(x) - M(0)\frac{l^2}{EI}X_3(x) - Q(0)\frac{l^3}{EI}X_4(x) + \frac{q_0l^4}{EI}X_5(x); \quad (6)$$

$$\varphi(x) = y(0)\frac{1}{l}\tilde{X}_1(x) + \varphi(0)\tilde{X}_2(x) - M(0)\frac{l}{EI}\tilde{X}_3(x) - Q(0)\frac{l^2}{EI}\tilde{X}_4(x) + \frac{q_0l^3}{EI}\tilde{X}_5(x); \quad (7)$$

$$M(x) = -y(0)\frac{EI}{l^2}\hat{X}_1(x) - \varphi(0)\frac{EI}{l}\hat{X}_2(x) + M(0)\hat{X}_3(x) + Q(0)l\hat{X}_4(x) - q_0l^2\hat{X}_5(x); \quad (8)$$

$$Q(x) = -y(0)\frac{EI}{l^3}\hat{X}_1(x) - \varphi(0)\frac{EI}{l^2}\hat{X}_2(x) + M(0)\frac{1}{l}\hat{X}_3(x) + Q(0)\hat{X}_4(x) - q_0l\hat{X}_5(x). \quad (9)$$

Із формул (6)-(9) видно, що визначення переміщень $y(x)$, $\varphi(x)$ та внутрішніх зусиль $M(x)$, $Q(x)$ в балці зводиться до обчислення значень функцій $X_n(x)$ ($n=1,2,3,4,5$) та їх безрозмірних похідних $\tilde{X}_n(x)$, $\hat{X}_n(x)$, $\hat{X}_n(x)$ ($n=1,2,3,4,5$). Тому доцільно виписати для них кінцеві розрахункові формули. Згідно з результатами роботи [10], матимемо:

$$X_n(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k c_{n,k,j} \left(\frac{x}{l}\right)^{4k+j} \quad (n=1,2,3,4,5). \quad (10)$$

$$\tilde{X}_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k \tilde{c}_{1,k,j} \left(\frac{x}{l}\right)^{4k+j-1}; \quad \tilde{X}_n(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{n-2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k \tilde{c}_{n,k,j} \left(\frac{x}{l}\right)^{4k+j} \quad (n=2,3,4,5); \quad (11)$$

$$\hat{X}_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k \hat{c}_{1,k,j} \left(\frac{x}{l}\right)^{4k+j-2}; \quad \hat{X}_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k \hat{c}_{2,k,j} \left(\frac{x}{l}\right)^{4k+j-1}; \quad (12)$$

$$\hat{X}_n(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{n-3} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k \hat{c}_{n,k,j} \left(\frac{x}{l}\right)^{4k+j} \quad (n=3,4,5); \quad (13)$$

$$\hat{X}_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k \hat{c}_{1,k,j} \left(\frac{x}{l}\right)^{4k+j-3}; \quad \hat{X}_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k \hat{c}_{2,k,j} \left(\frac{x}{l}\right)^{4k+j-2}; \quad (14)$$

$$\hat{X}_3(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k \hat{c}_{3,k,j} \left(\frac{x}{l}\right)^{4k+j-1}; \quad \hat{X}_n(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{n-4} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k \hat{c}_{n,k,j} \left(\frac{x}{l}\right)^{4k+j} \quad (n=4,5); \quad (15)$$

$$K = \frac{k_0l^4}{EI}.$$

Коефіцієнти рядів (10)-(15) тут послідовно обчислюються за формулами:

$$c_{n,0,0} = \frac{1}{(n-1)!}; \quad c_{n,0,j} = 0 \quad (n=1,2,3,4) \quad (j=1,2,3,\dots); \quad (16)$$

$$c_{5,0,j} = \frac{C_j}{(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)} \quad (j=0,1,2,\dots); \quad (17)$$

$$c_{n,k,j} = \frac{1}{p_{n,k,j}} \sum_{i=0}^j B_{j-i} c_{n,k-1,i} \quad (n=1,2,3,4,5) \quad (k=1,2,3,\dots) \quad (j=0,1,2,\dots); \quad (18)$$

$$p_{n,k,j} = (n+4k+j-4)(n+4k+j-3)(n+4k+j-2)(n+4k+j-1); \quad (19)$$

$$\tilde{c}_{n,0,0} = n-1 \quad (n=1,2); \quad \tilde{c}_{n,0,0} = \frac{1}{(n-2)!} \quad (n=3,4); \quad \tilde{c}_{n,0,j} = 0 \quad (n=1,2,3,4) \quad (j=1,2,3,\dots); \quad (20)$$

$$\tilde{c}_{5,0,j} = \frac{C_j}{(j+1)(j+2)(j+3)} \quad (j=0,1,2,\dots); \quad (21)$$

$$\tilde{c}_{n,k,j} = c_{n,k,j}(n+4k+j-1) \quad (n=1,2,3,4,5)(k=1,2,3,\dots)(j=0,1,2,\dots); \quad (22)$$

$$\hat{c}_{n,0,0} = 0 \quad (n=1,2); \quad \hat{c}_{n,0,0} = 1 \quad (n=3,4); \quad \hat{c}_{n,0,j} = 0 \quad (n=1,2,3,4)(j=1,2,3,\dots); \quad (23)$$

$$\hat{c}_{5,0,j} = \frac{C_j}{(j+1)(j+2)} \quad (j=0,1,2,\dots); \quad (24)$$

$$\hat{c}_{n,k,j} = \tilde{c}_{n,k,j}(n+4k+j-2) \quad (n=1,2,3,4,5)(k=1,2,3,\dots)(j=0,1,2,\dots); \quad (25)$$

$$\hat{c}_{n,0,0} = 0 \quad (n=1,2,3); \quad \hat{c}_{4,0,0} = 1 \quad \hat{c}_{n,0,j} = 0 \quad (n=1,2,3,4)(j=1,2,3,\dots); \quad (26)$$

$$\hat{c}_{5,0,j} = \frac{C_j}{j+1} \quad (j=0,1,2,\dots); \quad (27)$$

$$\hat{c}_{n,k,j} = \hat{c}_{n,k,j}(n+4k+j-3) \quad (n=1,2,3,4,5)(k=1,2,3,\dots)(j=0,1,2,\dots). \quad (28)$$

В наведених формулах B_j, C_j ($j=0,1,2,\dots$) – це коефіцієнти в рядах Маклорена для безрозмірних функцій $B(x), C(x)$ відповідно, записаних по степеням безрозмірної змінної x/l . У нашому випадку, зважаючи на (5) та скориставшись рядом Маклорена для експоненти:

$$B(x) = 1 + \frac{\delta}{1!} \frac{x}{l} + \frac{\delta^2}{2!} \left(\frac{x}{l}\right)^2 + \frac{\delta^3}{3!} \left(\frac{x}{l}\right)^3 + \dots,$$

знаходимо:

$$B_0 = 1, \quad B_j = \frac{\delta^j}{j!} \quad (j=1,2,3,\dots), \quad C_0 = 0, \quad C_1 = 1, \quad C_2 = -1, \quad C_j = 0 \quad (j=3,4,5,\dots). \quad (29)$$

По суті, формулами (6)-(29) визначено алгоритм аналітичного методу розрахунку заданої балки. Даний алгоритм реалізовано програмно.

Приклад. Проведемо розрахунок призматичної бетонної балки з обома закріпленими кінцями (рис. 1). Такому випадку відповідатимуть граничні умови:

$$y(0) = 0; \quad \varphi(0) = 0; \quad y(l) = 0; \quad \varphi(l) = 0.$$

Отже, два початкові параметри $y(0), \varphi(0)$ відомі. Два інших початкових параметри $M(0), Q(0)$ знайдемо із системи рівнянь, яку отримаємо після реалізації граничних умов на кінці $x=l$, використовуючи формули (6), (7). У підсумку рівності (6)-(9) для заданих граничних умов запишуться у вигляді:

$$y(x) = \frac{q_0 l^4}{E_0 I_0} (\lambda_1 X_3(x) + \lambda_2 X_4(x) + X_5(x)); \quad \varphi(x) = \frac{q_0 l^3}{E_0 I_0} (\lambda_1 \tilde{X}_3(x) + \lambda_2 \tilde{X}_4(x) + \tilde{X}_5(x));$$

$$M(x) = -q_0 l^2 (\lambda_1 \hat{X}_3(x) + \lambda_2 \hat{X}_4(x) + \hat{X}_5(x)); \quad Q(x) = -q_0 l (\lambda_1 \hat{X}_3(x) + \lambda_2 \hat{X}_4(x) + \hat{X}_5(x)),$$

де

$$\lambda_1 = \frac{X_4(l)\tilde{X}_5(l) - \tilde{X}_4(l)X_5(l)}{X_3(l)\tilde{X}_4(l) - \tilde{X}_3(l)X_4(l)}; \quad \lambda_2 = -\frac{X_3(l)\tilde{X}_5(l) - \tilde{X}_3(l)X_5(l)}{X_3(l)\tilde{X}_4(l) - \tilde{X}_3(l)X_4(l)}.$$

Вихідні дані: Довжина балки $l = 5$ м; Ширина підшви балки $b = 0,25$ м; Висота балки $h = 0,6$ м; $E = 1,5 \cdot 10^7$ кПа; $k(0) = 1,5 \cdot 10^3$ кН/м²; $k(l) = 4 \cdot 10^3$ кН/м²; $q(l/2) = 120$ кН/м.

Результати розрахунку АМ в числовому форматі представлено в табл. 1, 2 а в графічному – на рис. 2. Для порівняння в табл. 1, 2 також надані результати розрахунку МСЕ у програмному комплексі ЛІРА.

Таблиця 1 – Значення кінематичних параметрів

x	$y(x)$, мм		Відносна похибка, %	$\varphi(x)$, рад		Відносна похибка, %
	АМ	МСЕ		АМ	МСЕ	
0	0,000000	0,000000	0,00	0,000000	0,000000	0,00
0,25	0,081470	0,084000	3,11	0,000622	0,000640	2,89
0,5	0,296432	0,305000	2,89	0,001069	0,001100	2,95
0,75	0,601868	0,620000	3,01	0,001348	0,001388	3,01
1	0,957207	0,986000	3,01	0,001470	0,001516	3,08
1,25	1,325332	1,365000	2,99	0,001453	0,001499	3,16
1,5	1,673448	1,725000	3,08	0,001314	0,001356	3,25
1,75	1,973797	2,035000	3,10	0,001074	0,001110	3,35
2	2,204237	2,273000	3,12	0,000758	0,000785	3,50
2,25	2,348681	2,423000	3,16	0,000391	0,000406	3,84
2,5	2,397403	2,474000	3,19	-0,000003	-0,000001	74,09
2,75	2,347215	2,422000	3,19	-0,000396	-0,000407	2,74
3	2,201512	2,272000	3,20	-0,000763	-0,000786	3,05
3,25	1,970193	2,034000	3,24	-0,001077	-0,001111	3,16
3,5	1,669461	1,724000	3,27	-0,001314	-0,001356	3,22
3,75	1,321492	1,364000	3,22	-0,001451	-0,001498	3,25
4	0,953987	0,985000	3,25	-0,001467	-0,001515	3,26
4,25	0,599596	0,619000	3,24	-0,001343	-0,001387	3,25
4,5	0,295208	0,305000	3,32	-0,001065	-0,001099	3,24
4,75	0,081109	0,084000	3,56	-0,000619	-0,000639	3,22
5	0,000000	0,000000	0,00	0,000000	0,000000	0,00

Таблиця 2 – Значення силових параметрів

x	$M(x)$, кНм		Відносна похибка, %	$Q(x)$, кН		Відносна похибка, %
	АМ	МСЕ		АМ	МСЕ	
0	-192,021207	-197,525131	2,87	192,841855	197,654053	2,50
0,25	-144,053814	-148,348938	2,98	189,952660	194,806778	2,56
0,5	-97,489679	-100,570374	3,16	181,725534	186,575439	2,67
0,75	-53,581381	-55,458664	3,50	168,814024	173,573822	2,82
1	-13,419455	-14,129933	5,29	151,860637	156,412872	3,00
1,25	22,064640	22,452042	1,76	131,495226	135,700333	3,20
1,5	52,095196	53,474960	2,65	108,333782	112,040428	3,42
1,75	76,048685	78,277122	2,93	82,977687	86,033524	3,68
2	93,450075	96,346413	3,10	56,013531	58,276199	4,04
2,25	103,969167	107,319420	3,22	28,013535	29,361370	4,81
2,5	107,417136	110,980476	3,32	-0,463312	-0,121600	73,75
2,75	103,743437	107,260925	3,39	-28,869345	-29,586151	2,48
3	93,033303	96,238434	3,45	-56,665474	-58,447960	3,15
3,25	75,506041	78,136536	3,48	-83,317520	-86,124107	3,37
3,5	51,514360	53,324486	3,51	-108,291591	-112,031647	3,45
3,75	21,544980	22,317429	3,59	-131,048452	-135,586304	3,46
4	-13,779216	-14,223109	3,22	-151,036865	-156,200714	3,42
4,25	-53,695250	-55,488144	3,34	-167,685912	-173,282410	3,34
4,5	-97,294058	-100,519684	3,32	-180,396329	-186,231567	3,23
4,75	-143,512231	-148,208649	3,27	-188,530931	-194,438690	3,13
5	-191,121250	-197,292023	3,23	-191,404274	-197,281708	3,07

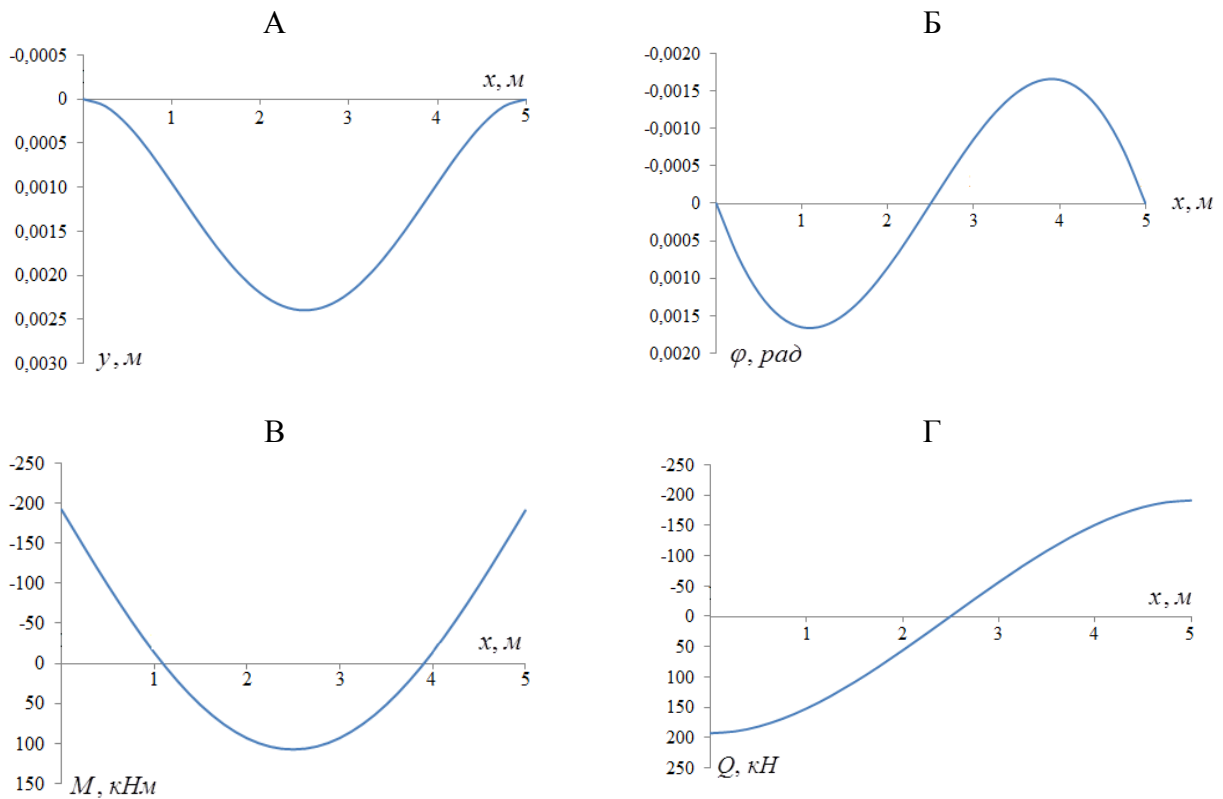


Рис 2. Графіки параметрів стану балки:
 А – прогин; Б – кут повороту; В – згинальний момент; Г – поперечна сила

Слід зазначити, що у програмному комплексі ЛПА не передбачено можливості безпосередньо задати закон зміни коефіцієнту постелі уздовж довжини балки. Для кожного скінченного елемента значення коефіцієнту постелі задається як середнє арифметичне значень на його кінцях, що впливає на величину похибки.

Висновки:

1. За результатами роботи отримали подальший розвиток аналітичні методи розрахунку балок, що опираються на неоднорідну суцільну пружну основу Вінклера. Впровадження таких методів в інженерну практику забезпечить більшу точність розрахунків.

2. До переліку нечисленних поодиноких випадків аналітичних розрахунків балки додано ще один, коли неоднорідність основи описується експоненціальною функцією.

3. Оскільки АМ ґрунтується на точному розв'язку відповідного диференціального рівняння, отримані тут чисельні результати можна трактувати, як точні. Такі розв'язки в замкненій формі є особливо цінними, оскільки вони можуть служити критеріями, по яким можна оцінювати точність різного роду наближених розв'язків.

4. Чисельно визначено похибку розрахунків МСЕ у програмному комплексі ЛПА для конструкції що розглядалася.

5. Перспективи подальших досліджень автори пов'язують з розглядом інших випадків, коли неоднорідність пружної основи Вінклера описується законами зміни коефіцієнта постелі, відсутніми в науковій літературі.

Література

1. Foyouzat M. A., Mofid M., & Akin J. E. On the dynamic response of beams on elastic foundations with variable modulus. *Acta Mechanica*. 2015. 227(2). 549–564. <https://doi.org/10.1007/s00707-015-1485-1>
2. Hayashi K. *Theorie des trägers auf elastischer unterlage: Und ihre anwendung auf den tiefbau, nebst einer tafel der kreisund hyperbelfunktionen*. J. Springer. 1921.
3. Franklin J. N., & Scott R. F. Beam equation with variable foundation coefficient. *Journal of the Engineering Mechanics Division* 1979. 105(5). 811–827. <https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0002525>
4. Guo Y.-J., & Weitsman Y.J. Solution method for beams on nonuniform elastic foundations. *Journal of Engineering Mechanics*. 2002. 128(5). 592–594. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2002\)128:5\(592\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:5(592))
5. Froio D., & Rizzi E. Analytical solution for the elastic bending of beams lying on a linearly variable Winkler support. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2017. 128-129, 680–694. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.04.021>
6. Al-Ani M. Analysis of beams on non-linear elastic Winkler foundation. *Engineering and Technology Journal*. 2005. 24(9), 1251–1261. <https://doi.org/10.30684/etj.24.9A.13>
7. Doeva O., Masjedi P. K., & Weaver P. M. Static analysis of composite beams on variable stiffness elastic foundations by the homotopy analysis method. *Acta Mechanica*. 2021. 232. 4169–4188. <https://doi.org/10.1007/s00707-021-03043-z>
8. Froio D., & Rizzi E. Analytical solution for the elastic bending of beams lying on a variable Winkler support. *Acta Mechanica*. 2015. 227(4). 1157–1179. <https://doi.org/10.1007/s00707-015-1508-y>
9. Al-Azzawi Adel A. & Al-Madani M. H. A state of the art review on beams on non-uniform elastic foundations. *ARPJ Journal of Engineering and Applied Sciences*. 2018. 13(7). 2647–2660.
10. Krutii Y., Surianinov M., Petrash S., & Yezhov M. Development of an analytical method for calculating beams on a variable elastic Winkler foundation. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2021. 1162(1), 012009. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/1162/1/012009>
11. Krutii Y., Surianinov M., Perperi A., Vakulenko V., & Teorlo N. Analytical calculation of a beam based on an elastic Winkler foundation with range inhomogeneity. *Mechanics and Mathematical Methods*. 2024. 6(2). 47–57. <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2024-6-2-47-57>
12. Krutii Y., Surianinov M., Vakulenko V., Soroka M., & Vasilieva N. Analytical calculation of beams on Winkler's variable elastic foundation. *Advances in Science and Technology*. 2024. 156. 75–80. <https://doi.org/10.4028/p-PD9h3g>
13. Крутий Ю. С. Розробка методу розв'язання задач стійкості і коливань деформівних систем зі змінними неперервними параметрами : дис. д-ра техн. наук : 01.02.04. Луцьк, 2016. 273 с.
14. Krutii Y. Construction of a Solution of the Problem of Stability of a Bar with Arbitrary Continuous Parameters. *Journal of Mathematical Sciences*. 2018. 231(5). 665–677.
15. Krutii Y., Surianinov M., Karnauhova G. Calculation Method for Axisymmetric Bending of Circular and Annular Plates on a Changeable Elastic Bed. Part 1. Analytical Relations. *Strength of Materials*. 2021. 53(2). 53–62.

References

- [1] M.A. Foyouzat, M. Mofid, & J.E. Akin, "On the dynamic response of beams on elastic foundations with variable modulus", *Acta Mechanica*, 227(2), 549–564, 2015. <https://doi.org/10.1007/s00707-015-1485-1>
- [2] K. Hayashi, *Theorie des trägers auf elastischer unterlage: Und ihre anwendung auf den tiefbau, nebst einer tafel der kreisund hyperbelfunktionen*, J. Springer, 1921.
- [3] J.N. Franklin, & R.F. Scott, "Beam equation with variable foundation coefficient", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 105(5), 811–827, 1979. <https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0002525>
- [4] Y.-J. Guo, & Y. J. Weitsman, "Solution method for beams on nonuniform elastic foundations", *Journal of Engineering Mechanics*, 128(5), 592–594, 2002. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2002\)128:5\(592\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:5(592))
- [5] D. Froio, & E. Rizzi, "Analytical solution for the elastic bending of beams lying on a linearly variable Winkler support", *International Journal of Mechanical Sciences*, 128-129, 680–694, 2017. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.04.021>
- [6] M. Al-Ani, "Analysis of beams on non-linear elastic Winkler foundation", *Engineering and Technology Journal*, 24(9), 1251–1261, 2005. <https://doi.org/10.30684/etj.24.9A.13>
- [7] O. Doeva, P.K. Masjedi, & P.M. Weaver, "Static analysis of composite beams on variable stiffness elastic foundations by the homotopy analysis method", *Acta Mechanica*, 232, 4169–4188, 2021. <https://doi.org/10.1007/s00707-021-03043-z>
- [8] D. Froio, & E. Rizzi, "Analytical solution for the elastic bending of beams lying on a variable Winkler support", *Acta Mechanica*, 227(4), 1157–1179, 2015. <https://doi.org/10.1007/s00707-015-1508-y>
- [9] A. Al-Azzawi Adel, & M.H. Al-Madani, "A state of the art review on beams on non-uniform elastic foundations", *ARPJ Journal of Engineering and Applied Sciences*, 13(7), 2647–2660, 2018.
- [10] Y. Krutii, M. Surianinov, S. Petrash, & M. Yezhov, "Development of an analytical method for calculating beams on a variable elastic Winkler foundation", *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 1162(1), 012009, 2021. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/1162/1/012009>
- [11] Y. Krutii, M. Surianinov, A. Perperi, V. Vakulenko, & N. Teorlo, "Analytical calculation of a beam based on an elastic Winkler foundation with range inhomogeneity", *Mechanics and Mathematical Methods*, 6(2), 47–57, 2024. <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2024-6-2-47-57>
- [12] Y. Krutii, M. Surianinov, V. Vakulenko, M. Soroka, & N. Vasilieva, "Analytical calculation of beams on Winkler's variable elastic foundation", *Advances in Science and Technology*, 156, 75–80, 2024. <https://doi.org/10.4028/p-PD9h3g>
- [13] Yu.S. Krutii, Rozrobka metodu rozviazannia zadach stiikosti i kolyvan deformivnykh system zi zminnyimi neperervnymi parametramy : dys. d-ra tekhn. nauk : 01.02.04. Lutsk, 2016.
- [14] Y. Krutii, "Construction of a Solution of the Problem of Stability of a Bar with Arbitrary Continuous Parameters", *Journal of Mathematical Sciences*, 231(5), 665–677, 2018.
- [15] Y. Krutii, M. Surianinov, G. Karnauhova, "Calculation Method for Axisymmetric Bending of Circular and Annular Plates on a Changeable Elastic Bed. Part 1. Analytical Relations", *Strength of Materials*, 53(2), 53–62, 2021.

ANALYTICAL CALCULATION OF A BEAM BASED ON AN ELASTIC WINKLER FOUNDATION WITH EXPONENTIAL INHOMOGENITY

¹**Krutii Yu.**, Doctor of Technical Sciences, Professor,
yurii.krutii@gmail.com, ORCID: 0000-0001-7105-3087
¹**Surianinov M.**, Doctor of Technical Sciences, Professor,
sng@ogasa.org.ua, ORCID: 0000-0003-2592-5221
¹**Perperi A.**, Ph.D., Associate Professor,
a.perperi@odaba.edu.ua, ORCID: 0000-0001-7112-6864
¹**Vakulenko V.**, graduate student,
91vvv19@gmail.com, ORCID: 0009-0008-4410-7666
¹**Teorlo N.**, graduate student,
nata.teorlo@gmail.com, ORCID: 0009-0003-3013-9468
¹*Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture*
4, Didrihsona str., Odesa, Ukraine, 65029

Abstract. The article is devoted to the analytical calculations for beam bending based on nonhomogeneous solid elastic Winkler base. In this paper we consider the case where the beam is subjected to a parabolic-variable transverse load and the inhomogeneity of the elastic foundation is given by an exponential function. The fundamental functions and partial solution of the corresponding differential equation of beam bending are written out in explicit closed form. These functions are dimensionless and are represented by absolutely and uniformly convergent power series. In turn, these functions are used to express the formulas for the parameters of the stress-strain state of a beam such as deflection, angle of rotation, bending moment, and shear force. The unknown integration constants in these formulas are expressed through the initial parameters, which are found after the implementation of the given boundary conditions. Thus, the calculation of a bending beam is reduced to the procedure of numerical implementation of explicit analytical formulas for the parameters of the stress-strain state.

The practical application of the obtained solutions is demonstrated by an example. A prismatic concrete beam based on an exponentially variable elastic foundation is considered. The results of the author's calculation are presented in numerical and graphical formats for the case when both ends of the beam are fixed. The numerical values obtained by the author's method are interpreted as exact values, since the applied calculation method is based on the exact solution of the corresponding differential equation. The availability of such solutions makes it possible to evaluate the accuracy of solutions obtained using various approximate methods by comparison. To such comparison, the paper presents the results of the calculation obtained by the finite element method (FEM). The absolute error of the FEM in the calculation of this structure is determined.

Keywords: beam, nonhomogeneous elastic foundation, exponential inhomogeneity, Winkler hypothesis, exact solution, analytical calculation.

Стаття надійшла до редакції 2.12.2024