УДК 624.04 DOI: 10.31650/2786-6696-2025-12-51-64

РОЗРАХУНОК НА ВІЛЬНІ ОСЕСИМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ КРУГЛИХ ПЛАСТИН, ЩО ОПИРАЮТЬСЯ НА СТЕПЕНЕВО-ЗМІННУ ПРУЖНУ ОСНОВУ ВІНКЛЕРА

[1]**Крутій Ю.С.,** д.т.н., професор,
yurii.krutii@gmail.com, ORCID: 0000-0001-7105-3087
[1]**Перпері А.О.,** к.т.н., доцент,
a.perperi@odaba.edu.ua, ORCID: 0000-0001-7112-6864
[1]**Величко Д.В.,** аспірант,
velychko.engineer@gmail.com, ORCID: 0000-0002-7837-872X
[1]*Одеська державна академія будівництва та архітектури*
вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, 65029, Україна

Анотація. Дана публікація присвячена подальшому розвитку аналітичних методів розрахунку на вільні коливання круглих пластин, що опираються на неоднорідну суцільну пружну основу Вінклера. Неоднорідність пружної основи задається змінним коефіцієнтом постелі. Розглядається випадок, коли коефіцієнт постелі є степеневою функцією. В явній формі виписані фундаментальні функції відповідного рівняння коливань для круглих суцільних пластин. Дані функції є безрозмірними та представляються абсолютно і рівномірно збіжними подвійними степеневими рядами. В свою чергу, через вказані функції виражаються формули для динамічних параметрів стану пластини – прогину, кута повороту, радіального і окружного згинальних моментів та поперечної сили. Отримано аналітичне подання для частоти вільних коливань пластини, що встановлює її залежність від безрозмірної частоти та інших механічних параметрів системи. В свою чергу безрозмірна частота визначається з частотних рівнянь, до яких приходимо після реалізації заданих граничних умов.

На прикладі продемонстровано практичне застосування отриманих розв’язків. Розглянуто бетонну плиту з жорстко закріпленим контуром, що опирається на степенево-змінну пружну основу. Авторським методом (АМ) обчислені перші п’ять частот осесиметричних коливань. Також в графічному форматі представлені відповідні перші п’ять форм коливань. Отримані АМ чисельні значення трактуються як точні, оскільки застосований метод розрахунку ґрунтується на точному розв’язку відповідного диференціального рівняння. Наявність таких розв’язків дозволяє шляхом порівняння оцінювати точність розрахунків, отриманих за допомогою різного роду наближених методів. З метою такого порівняння, в роботі надано результати розрахунку, що отримані методом скінченних елементів (МСЕ). Визначено відносну похибку МСЕ при розрахунку даної конструкції.

Ключові слова: кругла пластина, неоднорідна основа, гіпотеза Вінклера, змінний коефіцієнт постелі, осесиметричні коливання, аналітичний розв’язок.

Вступ. Круглі пластини на суцільній пружній основі становлять окремий тип конструкцій, що широко використовуються в інженерній практиці. Їх застосування охоплює низку галузей, серед яких – промислове та цивільне будівництво, транспортна інфраструктура, гідротехнічне та аерокосмічне машинобудування, кораблебудування тощо. У будівництві особливо поширені інженерні споруди з круговою формою в плані: телевізійні вежі, вентиляційні й димові труби, опори вітроенергетичних установок, башти радіорелейного зв’язку та інші. Для таких конструкцій характерне використання фундаментів у вигляді кільцевих пластин, що працюють у контакті з основою.

Одним з найпоширеніших підходів до моделювання взаємодії конструкції з ґрунтовою основою є модель Вінклера, яка розглядає основу як сукупність незалежних вертикальних пружин, що чинять опір переміщенням конструкції. У рамках цієї моделі основа характеризується коефіцієнтом постелі – єдиним параметром, що описує її жорсткість. У найпростішому випадку передбачається, що основа є однорідною, а коефіцієнт постелі –

сталим, що суттєво спрощує математичний опис і дає змогу отримувати аналітичні розв'язки. Проте на практиці така ідеалізація рідко відповідає дійсності. Для отримання точніших результатів доцільно враховувати неоднорідність основи, при якій коефіцієнт постелі є функцією координат [1].

Дана стаття присвячена розрахунку на вільні коливання круглих суцільних пластин, коли коефіцієнт постелі, який характеризує неоднорідність основи, є степеневою функцією.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Теорія розрахунку круглих пластин докладно розглядається в працях [2-4] та багатьох інших. Щодо аналітичних розрахунків круглих пластин, що лежать на пружній основі Вінклера зі змінним коефіцієнтом постелі, то вони зустрічаються в науковій періодиці вкрай рідко [1, 5-6]. У публікаціях [5-6] запропоновано аналітичний метод розрахунку осесиметричного згину круглих та кільцевих пластин, що спирається на модель Вінклера зі змінним коефіцієнтом постелі. Метод включає розв'язання відповідного диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами, що дозволяє отримати точні аналітичні вирази для прогинів та внутрішніх зусиль при довільних граничних умовах і навантаженнях. Це дає змогу застосовувати метод для різних типів пластин та навантажень, що робить його корисним для практичних розрахунків.

Детальний огляд робіт, присвячених дослідженню коливань круглих пластин на змінній пружній основі, надано в [1]. Після ретельного аналізу автори [1] констатують, що пошук аналітичних розв'язків є актуальним.

У публікації [7] за допомогою лінійного аналізу та методу Релея-Шмідта розв'язано основну задачу та наведено частотні коефіцієнти, що відповідають нижчим симетричним та несиметричним формам поперечних коливань, за умови, що тонка ізотропна пластина пружно утримується від переміщення та обертання. У статті [8] представлено узагальнений чисельний метод, що ґрунтується на відомому методі Мора. Зокрема, метод адаптовано для випадку змінної одно параметричної пружної основи. Важливо зауважити, що він був реалізований для комп'ютерного застосування. У роботі [9] для визначення найменшої власної частоти поперечних коливань жорстко закріплених та підпертих круглих пластин застосовано варіаційний метод Релея-Рітца. При цьому координатні функції є комбінацією поліномів, які задовольняють граничні умови на зовнішній границі, та тригонометричних виразів. Автори [10] за допомогою аналітичного методу отримали частотне рівняння кругової пластини з пружними крайовими опорами, частина якої опирається на несуцільну пружну основу, провели параметричні дослідження поведінки кругових пластин з пружною крайовою опорою при різних значеннях параметра поперечної жорсткості, параметра основи для різних граничних умов. У [11] представлено чисельну процедуру методу скінченних елементів для нелінійного динамічного аналізу круглих залізобетонних плитних конструкцій, що піддаються змінному динамічному навантаженню. При цьому використовуються вироджені елементи з вісьмома вузлами. У статті [12] досліджено вільні коливання та проведено модальний аналіз тонких круглих пластин з довільними крайовими умовами, що лежать на пружній основі. Для моделювання пружної основи використовуються параметри Пастернака та Вінклера. Отримано значення власних частот та форм коливань круглих пластин з використанням чисельного методу розв'язання диференціальних рівнянь. При цьому враховано вплив параметрів жорсткості основи та крайових умов на власні частоти та форми коливань. Роботи [13, 14] присвячено дослідженню коливань круглих пластин при нестандартних граничних умовах. У роботі [13] представлено дослідження коливальних характеристик тонких круглих пластин на однорідній основі Вінклера зі спеціальним пружним затисненням на кромці. Аналітичним методом отримано частотне рівняння. Проведено параметричні дослідження коливань круглих пластин, при різних параметрах жорсткості пружного затиснення на контурі. У [14] розглянуто ситуацію, коли граничні умови пластини відхиляються від класичних випадків. Досліджено поперечні коливання тонких круглих пластин на однорідній основі Вінклера з пружною опорою по контуру. У статті [15] представлено дослідження динаміки тонких круглих пластин, закріплених по контуру та проведено скінченно-елементний аналіз. Аналізуючи динамічну поведінку пластини, визначено форми коливань, які можуть бути використані для виявлення закономірностей, що характеризують місце пошкодження. У [16] та [17] на основі класичної теорії пластин побудовано точні розв'язки для характеристик вільних коливань тонких круглих пластин, пружно обмежених від переміщень, які спираються на пружну основу типу Вінклера. Проведено параметричні дослідження для оцінки впливу крайового підкріплення та жорсткості пружної основи на власні частоти круглих пластин. Розрахунки проведено для власних частот коливань для різних значень параметра жорсткості основи типу Вінклера. Дослідження [18] та [19] зосереджені на застосуванні методу двовимірного диференціального перетворення для вивчення динамічної реакції функціонально неоднорідних круглих пластин, що спираються на пружну основу, що характеризується двома параметрами. У роботі [20] розглянуто аналіз вільних коливань круглих пластин, що спираються на основи Вінклера і Пастернака. Основне диференціальне рівняння в частинних похідних розв'язується за допомогою методу Гальоркіна. Визначено поверхневі радіальні та окружні напруження. Отримані аналітичні розв'язки використано для дослідження впливу пружних основ на динамічну поведінку круглої пластини, впливу радіальних та окружних напружень на форми коливань круглої пластини. У статті [21] досліджено динамічну поведінку нелінійних вільних коливань круглої пластини, що спирається на двопараметричну основу. Розв'язок диференціального рівняння отримано аналітично з використанням перетворення Лапласа. Аналітичні розв'язки використано для визначення впливу пружної основи, радіальних та окружних напружень на власну частоту пластини, та визначено радіальні та колові напруження.

Отже, як показує аналіз публікацій, автори здебільшого використовують різного роду наближені методи. В науковій періодиці відсутні дослідження коливань круглих пластин на неоднорідній пружній основі, які базуються на точному розв'язку диференціального рівняння. Тому розробка саме таких аналітичних методів розрахунку круглих пластин є актуальною. Дана стаття присвячена випадку, коли неоднорідність основи задається степеневою функцією.

Мета та завдання. Мета роботи – подальший розвиток аналітичних методів розрахунку на вільні коливання круглих пластин на неоднорідній пружній основі.

Завдання роботи:

– отримати аналітичний розв'язок задачі про осесиметричні коливання круглих суцільних пластин, що опираються на суцільну пружну основу Вінклера зі степенево-змінним коефіцієнтом постелі;

– проілюструвати на прикладі застосування отриманих розв'язків, виконавши аналітичний розрахунок бетонної плити АМ та МСЕ;

– визначити похибку МСЕ при розрахунку даної конструкції.

Матеріали та методика дослідження. Методика досліджень ґрунтується на точному розв'язку диференціального рівняння коливань пластини та розробленим способом його чисельної реалізації. Для побудови точного розв'язку в цій публікації використовується метод прямого інтегрування, розвинений у роботі [22]. При розробці авторської методики використовувались теорія функціональних рядів та теорія диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Результати досліджень. Об'єктом дослідження є кругла суцільна пластина сталої циліндричної жорсткості D, що опирається на неоднорідну суцільну пружну основу Вінклера та знаходиться під впливом змінного неперервно-розподіленого поперечного навантаження (рис. 1). Тут a – радіус пластини, r – радіальна координата $(0 \le r \le a)$.

Вільні осесиметричні коливання пластини виникають, коли сила реакції пружної основи $R(r,t)$ і умови закріплення країв не залежать від полярного кута θ. Під час таких коливань у пластині діють тільки три динамічні внутрішні зусилля, а саме, радіальний і окружний згинальні моменти $M_r(r,t)$, $M_\theta(r,t)$, а також радіальна поперечна сила $Q_r(r,t)$ (рис. 2). Крутильний момент $M_{r\theta}(r,t)$ і окружна поперечна сила $Q_\theta(r,t)$ дорівнюють нулю завдяки осьовій симетрії коливань.

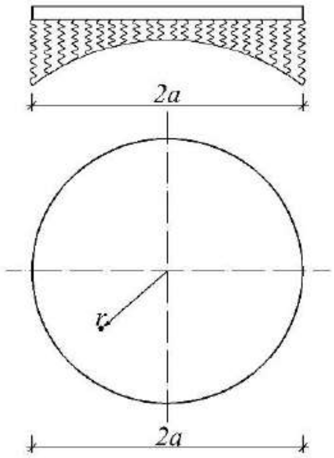


Рис. 1. Кругла пластина на змінній пружній основі

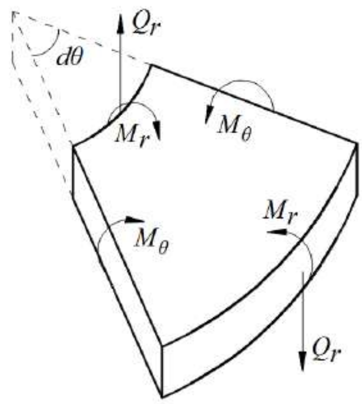


Рис. 2. Згинальні моменти та поперечна сила в пластині

Згідно з гіпотезою Вінклера реакція основи $R(r,t)$ на пластину і динамічний прогин пластини $W(r,t)$ пов'язані між собою рівністю:

$$R(r,t) = -k(r)W(r,t),$$

де $k(r)$ – змінний коефіцієнт постелі. Відносно $k(r)$ приймаємо форму запису $k(r) = k_0 B(r)$, де k_0 – значення коефіцієнта постелі в деякій характерній точці пластини; $B(r)$ – безрозмірна безперервна функція, що виражає закон зміни коефіцієнта постелі від радіальної координати.

Дана робота присвячена випадку, коли коефіцієнт постелі задається степеневою функцією:

$$k(r) = k(a)\left(\frac{r}{a}\right)^s, \; s \ge 0,$$

тобто тут

$$k_0 = k(a), \; B(r) = \left(\frac{r}{a}\right)^s.$$

Диференціальне рівняння коливань у нашому випадку має вигляд [2-4]:

$$D\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial W}{\partial r}\right)\right]\right\} + k_0\left(\frac{r}{a}\right)^s W + \rho h\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

де $\rho-$ щільність матеріалу, $h-$ товщина пластини. Знаходження точного розв'язку даного рівняння є центральною проблемою дослідження.

Застосовуючи метод Фур'є, розв'язок (1) шукаємо у вигляді:

$$W(r,t) = w(r)T(t), \tag{2}$$

де $w(r)$ – амплітудна функція прогинів, що залежить тільки від координати r, $T(t)$ – функція часу. Підставивши (2) у рівняння (1) та розподіливши змінні, отримаємо два звичайні диференціальні рівняння:

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0; \tag{3}$$

$$D\frac{1}{r}\frac{d}{\partial r}\left\{r\frac{d}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{\partial r}\left(r\frac{dw}{\partial r}\right)\right]\right\} + \left(k_0\left(\frac{r}{a}\right)^s - \rho h\omega^2\right)w = 0, \tag{4}$$

де $\omega^2 -$ константа методу Фур'є.

Розв'язок рівняння (3) очевидний:

$$T(t) = T(0)\cos\omega t + \frac{\dot{T}(0)}{\omega}\sin\omega t,$$

де $T(0), \dot{T}(0)$ – параметри початкових умов руху. З цього розв'язку впливає, що введена стала величина ω є частотою вільних коливань пластини.

Головна форма коливань визначається як розв'язок рівняння (4), яке перепишемо у вигляді:

$$\Delta\Delta w+\frac{1}{a^4}\left(K\left(\frac{r}{a}\right)^s-\Omega^2\right)w=0\,, \tag{5}$$

де $\Delta = d^2/dr^2 + 1/r\, d/dr$ – оператор Лапласа; $K = a^4 k_0/D$ – відомий безрозмірний параметр; Ω – безрозмірна частота, яка пов'язана з частотою ω рівністю:

$$\Omega^2=\frac{a^4\rho h\omega^2}{D}\,. \tag{6}$$

Позначимо через $X_n(r), Y_n(r)$ $(n=1,2)$ шукані фундаментальні розв'язки рівняння (5), причому для $Y_n(r)$ приймемо подання:

$$Y_n(r)=X_n(r)\ln\frac{r}{a}+Z_n(r)\;\;(n=1,2)\,, \tag{7}$$

де $Z_n(r)$ – допоміжні невідомі функції. Підставляючи (7) у рівняння (5), після перетворень отримаємо:

$$\left(\Delta\Delta\, X_n(r)+\frac{1}{a^4}\left(K\left(\frac{r}{a}\right)^s-\Omega^2\right)X_n(r)\right)\ln\frac{r}{a}+$$
$$+\;\Delta\Delta\, Z_n(r)+\frac{1}{a^4}\left(K\left(\frac{r}{a}\right)^s-\Omega^2\right)Z_n(r)+\frac{4}{r}\frac{d^3X_n(r)}{dr^3}=0\,. \tag{8}$$

Оскільки за умовою $X_n(r)$ $(n=1,2)$ – розв'язки рівняння (5), то вираз при логарифмі в (8) повинен тотожно дорівнювати нулю. Отже, замість рівності (8) можемо записати:

$$\Delta\Delta\, X_n(r)+\frac{1}{a^4}\left(K\left(\frac{r}{a}\right)^s-\Omega^2\right)X_n(r)=0\;\;(n=1,2)\,; \tag{9}$$

$$\Delta\Delta\, Z_n(r)+\frac{1}{a^4}\left(K\left(\frac{r}{a}\right)^s-\Omega^2\right)Z_n(r)=-\frac{4}{r}\frac{d^3X_n(r)}{dr^3}\;\;(n=1,2)\,. \tag{10}$$

Після визначення з рівнянь (9), (10) фундаментальних $X_n(r)$ $(n=1,2)$ та допоміжних $Z_n(r)$ $(n=1,2)$ функцій, загальний інтеграл диференціального рівняння (5) запишеться у вигляді:

$$w(r)=C_1X_1(r)+C_2X_2(r)+C_3Y_1(r)+C_4Y_2(r)\,, \tag{11}$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 – довільні константи, що мають розмірність прогину.

Загалом формула (11) буде придатна для дослідження коливань суцільних та кільцевих пластин. Однак дане дослідження присвячено саме суцільним пластинам, тому із умови скінченності прогину в центрі пластини $r=0$, знаходимо $C_3=C_4=0$. В такому разі замість формули (11) матимемо:

$$w(r)=C_1X_1(r)+C_2X_2(r)\,. \tag{12}$$

Отже, у даному випадку слід визначити тільки дві фундаментальні функції $X_n(r)$ $(n=1,2)$, а знаходити $Z_n(r)$ $(n=1,2)$ немає потреби.

Розв'язки рівнянь (9) шукатимемо у вигляді:

$$X_n(r)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-K)^k\Omega^{2m}\alpha_{n,m,k}(r)\,, \tag{13}$$

де $\alpha_{n,m,k}(r)$ $(n=1,2)$ – невідомі функції, які вважаємо неперервними разом зі своїми похідними від першого до четвертого порядку. Поки що припускаємо, що ряди (13), а також аналогічні ряди, складені з перших чотирьох похідних функцій $\alpha_{n,m,k}(r)$ $(n=1,2)$, рівномірно збігаються. У такому разі буде можлива операція диференціювання рядів.

Підставляючи (13) у рівняння (9), матимемо:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-K)^k\Omega^{2m}\Delta\Delta\alpha_{n,m,k}(r)-\frac{1}{a^4}\left(\frac{r}{a}\right)^s\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-K)^{k+1}\Omega^{2m}\alpha_{n,m,k}(r)-$$

$$-\frac{1}{a^4}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-K)^k\Omega^{2m+2}\alpha_{n,m,k}(r)=0.$$

У другій сумі зсунемо індекс k на одиницю, тобто замінимо k на $k-1$. Таку ж саму операцію виконаємо в третій сумі з індексом m. У підсумку отримаємо:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-K)^k\Omega^{2m}\Delta\Delta\alpha_{n,m,k}(r)-\frac{1}{a^4}\left(\frac{r}{a}\right)^s\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(-K)^{k}\Omega^{2m}\alpha_{n,m,k-1}(r)-$$

$$-\frac{1}{a^4}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-K)^k\Omega^{2m}\alpha_{n,m-1,k}(r)=0.$$

Далі, після перетворень приходимо до необхідності виконання тотожності:

$$\Delta\Delta\alpha_{n,0,0}(r)+\sum_{k=1}^{\infty}(-K)^k\left(\Delta\Delta\alpha_{n,0,k}(r)-\frac{1}{a^4}\left(\frac{r}{a}\right)^s\alpha_{n,0,k-1}(r)\right)+\sum_{m=1}^{\infty}\Omega^{2m}\left(\Delta\Delta\alpha_{n,m,0}(r)-\frac{1}{a^4}\alpha_{n,m-1,0}(r)\right)+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(-K)^k\Omega^{2m}\left(\Delta\Delta\alpha_{n,m,k}(r)-\frac{1}{a^4}\left(\frac{r}{a}\right)^s\alpha_{n,m,k-1}(r)-\frac{1}{a^4}\alpha_{n,m-1,k}(r)\right)=0.$$

Щоби задовольнити дану тотожність, прирівняємо до нуля всі змінні коефіцієнти при степенях $(-K)^k\Omega^{2m}$ $(m=0,1,2,...)(k=0,1,2,...)$. При цьому в отриманих рівняннях перейдемо від операторної до явної форми запису. У підсумку для визначення початкових та твірних функцій матимемо диференціальні рівняння:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\alpha_{n,0,0}(r)}{dr}\right)\right]\right\}=0\quad(n=1,2);\tag{14}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\alpha_{n,m,0}(r)}{dr}\right)\right]\right\}=\frac{1}{a^4}\alpha_{n,m-1,0}(r)\quad(m=1,2,3,...);\tag{15}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\alpha_{n,0,k}(r)}{dr}\right)\right]\right\}=\frac{1}{a^4}\left(\frac{r}{a}\right)^s\alpha_{n,0,k-1}(r)\quad(k=1,2,3,...);\tag{16}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\alpha_{n,m,k}(r)}{dr}\right)\right]\right\}=\frac{1}{a^4}\left(\frac{r}{a}\right)^s\alpha_{n,m,k-1}(r)+\frac{1}{a^4}\alpha_{n,m-1,k}(r)\tag{17}$$

$$(m=1,2,3,...)\,(k=1,2,3,...).$$

В якості $\alpha_{n,0,0}(r)\,(n=1,2)$ виберемо такі функції:

$$\alpha_{n,0,0}(r)=\left(\frac{r}{a}\right)^{2n-2}\quad(n=1,2).\tag{18}$$

Очевидно, що кожна з них задовольняє рівнянню (14). Далі, інтегруючи рівняння (15)-(17) і вважаючи при цьому сталі інтегрування рівними нулю, отримаємо:

$$\alpha_{n,m,0}(r)=\frac{1}{a^4}\int_0^r\frac{1}{r}\int_0^r r\int_0^r\frac{1}{r}\int_0^r r\alpha_{n,m-1,0}(r)\,drdrdrdr\quad(m=1,2,3,...);\tag{19}$$

$$\alpha_{n,0,k}(r)=\frac{1}{a^4}\int_0^r\frac{1}{r}\int_0^r r\int_0^r\frac{1}{r}\int_0^r r\left(\frac{r}{a}\right)^s\alpha_{n,0,k-1}(r)\,drdrdrdr\ \ (k=1,2,3,...)\,; \tag{20}$$

$$\alpha_{n,m,k}(r)=\frac{1}{a^4}\int_0^r\frac{1}{r}\int_0^r r\int_0^r\frac{1}{r}\int_0^r r\left(\left(\frac{r}{a}\right)^s\alpha_{n,m,k-1}(r)+\alpha_{n,m-1,k}(r)\right)drdrdrdr \tag{21}$$

$$(m=1,2,3,...)\,(k=1,2,3,...)\,.$$

Як видно, формули (19)-(21) є рекурентними. За допомогою цих формул по відомій початковій функції $\alpha_{n,0,0}(r)$ послідовно визначаються функції $\alpha_{n,m,0}(r),\ \alpha_{n,0,k}(r),\ \alpha_{n,m,k}(r)$, які називатимемо твірними [22]. Для таких функцій рівняння (9) задовольняється тотожно за побудовою.

Запишемо твірні функції у явному аналітичному вигляді, розв’язавши рекурентні співвідношення (19)-(21). Послідовно інтегруючи по формулам (19), (20) з урахуванням (18), знаходимо:

$$\alpha_{n,m,0}(r)=\frac{1}{(\,2^{2m}(n+2m-1)!\,)^2}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n+4m-2}\quad(m=1,2,3,...)\,; \tag{22}$$

$$\alpha_{n,0,k}(r)=\frac{1}{(p_{n,0,1,s}\,p_{n,0,2,s}\cdots p_{n,0,k,s})^2}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n+k(s+4)-2}\quad(k=1,2,3,...)\,, \tag{23}$$

де

$$p_{n,0,k,s}=(2n+k(s+4)-4)(2n+k(s+4)-2)\ (k=1,2,3,...)\,.$$

Розв’язок (21) шукатимемо у вигляді:

$$\alpha_{n,m,k}(r)=c_{n,m,k,s}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n+4(m+k)+ks-2}\quad(m=1,2,3,...)(k=1,2,3,...) \tag{24}$$

де $c_{n,m,k,s}$ – безрозмірні коефіцієнти, що підлягають визначенню. При цьому, в трьох окремих випадках $m=0,\ k=0$; $k=0,\ m=1,2,3,...$; $m=0,\ k=1,2,3,...$ рівність (24) повинна співпадати відповідно з (18), (22), (23). Із цих умов знаходимо:

$$c_{n,0,0,s}=1;\ \ c_{n,m,0,s}=\frac{1}{(2^{2m}(n+2m-1)!)^2};\ \ c_{n,0,k,s}=\frac{1}{(p_{n,0,1,s}\,p_{n,0,2,s}\cdots p_{n,0,k,s})^2}\,. \tag{25}$$

У загальному випадку підставимо (24) в обидві частини (21) та виконаємо інтегрування. У підсумку матимемо:

$$c_{n,m,k,s}=\frac{c_{n,m,k-1,s}+c_{n,m-1,k,s}}{p^2_{n,m,k,s}}\quad(m=1,2,3,...)(k=1,2,3,...)\,, \tag{26}$$

де

$$p_{n,m,k,s}=(2n+4(m+k)+ks-4)(2n+4(m+k)+ks-2)\,.$$

Отже, рекурентними формулами (25), (26) повністю визначені шукані коефіцієнти.

Доведемо тепер рівномірну збіжність рядів (13). Враховуючи, що $\max\limits_{0\le r\le a}B(r)=1$ та виходячи з властивостей визначених інтегралів, з (20), (21) отримаємо оцінки:

$$\alpha_{n,0,k}(r)\le\frac{1}{(2^{2k}(n+2k-1)!)^2}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n+4k-2}\quad(k=1,2,3,...)\,; \tag{27}$$

$$\alpha_{n,m,k}(r)\le\frac{1}{a^4}\int_0^r\frac{1}{r}\int_0^r r\int_0^r\frac{1}{r}\int_0^r r(\alpha_{n,m,k-1}(r)+\alpha_{n,m-1,k}(r))drdrdrdr\ \ (m=1,2,3,...)(k=1,2,3,...)\,. \tag{28}$$

Далі, виконуючи послідовно операції за рекурентною формулою (28) для вказаних значень індексів m,k з урахуванням (22), (27), приходимо до наступної загальної формули:

$$\alpha_{n,m,k}(r) \le \frac{C_{m+k}^{m}}{(2^{2(m+k)}(n+2(m+k)-1)!\,)^2}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n+4(m+k)-2} \quad (m=1,2,3,...)(k=1,2,3,...)\,, \tag{29}$$

де C_{m+k}^{m} – число сполучень з $m+k$ по m.

Скориставшись (22), (27), (29), для рядів (13) будемо мати:

$$\left|X_n(r)\right| \le \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} K^k \Omega^{2m} \frac{(m+k)!}{m!k!(2^{2(m+k)}(n+2(m+k)-1)!\,)^2}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n+4(m+k)-2} \le$$

$$\le \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{K^k \Omega^{2m}}{m!k!} = \exp(K+\Omega^2) \;\; (n=1,2).$$

Як видно, у ролі мажоранти тут виступає константа. Тим самим доведено, що ряди (13) абсолютно й рівномірно збігаються. Аналогічно доводиться абсолютна й рівномірна збіжність подібних рядів із перших чотирьох похідних функцій $\alpha_{n,m,k}(x)$ $(n=1,2)$.

Доведемо тепер, що функції $X_n(r)(n=1,2)$ лінійно незалежні. Допускаючи зворотне, вважатимемо, що виконується тотожність:

$$C_1X_1(r)+C_2X_2(r) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-K)^k\Omega^{2m}\left[C_1\alpha_{1,m,k}(r)+C_2\alpha_{2,m,k}(r)\right]=0\,, \tag{30}$$

причому C_1, C_2 не дорівнюють нулю. Виконання цієї тотожності можливе тільки за умов:

$$C_3\alpha_{1,m,k}(r)+C_4\alpha_{2,m,k}(r)=0 \;\; (m=0,1,2,...)(k=0,1,2,...).$$

Зокрема, коли $m=0,\, k=0$, має бути виконано: $C_3+C_4(r/a)^2=0$. Звідси $C_1=C_2=0$. Отже, розв’язки $X_n(r)(n=1,2)$ лінійно незалежні. Крім цього, ґрунтуючись на аналізі формул (13), (18), (22)-(24), робимо висновок, що функції $X_n(r)$ $(n=1,2)$ є безрозмірними.

Таким чином, функція прогину $W(r,t)$ визначена. Після цього динамічний кут повороту $\varphi(r,t)$ і динамічні зусилля в пластині $M_r(r,t)$, $M_\theta(r,t)$, $Q_r(r,t)$ визначаються за відомими формулами [2]:

$$\varphi(r,t) = \frac{\partial W}{\partial r}; \tag{31}$$

$$M_r(r,t) = -D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}+\frac{\mu}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\right); \tag{32}$$

$$M_\theta(r,t) = -D\left(\mu\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\right); \tag{33}$$

$$Q_r(r,t) = -D\left(\frac{\partial^3 W}{\partial r^3}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial W}{\partial r}\right). \tag{34}$$

З метою виділити в правій частині формули (12) безрозмірний множник, вважатимемо $C_n = a\lambda_n$ $(n=1,2)$, де λ_n – довільні безрозмірні константи. Після цього формулу для амплітудних прогинів (12) можемо записати у вигляді:

$$w(r) = a\,w_0(r); \tag{35}$$

$$w_0(r) = \lambda_1X_1(r)+\lambda_2X_2(r), \tag{36}$$

де $w_0(r)$ – безрозмірна функція. У подібному форматі запишемо також формули для перших трьох похідних від функції $w(r)$:

$$\frac{dw}{dr} = \tilde{w}_0(r), \tag{37}$$

$$\tilde{w}_0(r) = \lambda_1\tilde{X}_1(r)+\lambda_2\tilde{X}_2(r); \tag{38}$$

$$\frac{d^2 w}{dr^2} = \frac{1}{a} \widehat{w}_0(r), \tag{39}$$

$$\widehat{w}_0(r) = \lambda_1 \widehat{X}_1(r) + \lambda_2 \widehat{X}_2(r); \tag{40}$$

$$\frac{d^3 w}{dr^3} = \frac{1}{a^2} \hat{w}_0(r), \tag{41}$$

$$\hat{w}_0(r) = \lambda_1 \hat{X}_1(r) + \lambda_2 \hat{X}_2(r), \tag{42}$$

де

$$\tilde{X}_n(r) = a \frac{dX_n(r)}{dr}, \ \widehat{X}_n(r) = a^2 \frac{d^2 X_n(r)}{dr^2}, \ \hat{X}_n(r) = a^3 \frac{d^3 X_n(r)}{dr^3} \quad (n = 1, 2). \tag{43}$$

На відміну від похідних функцій $X_n(r)$, функції (43) будуть безрозмірними [22]. Далі називатимемо їх безрозмірними похідними.

Тим самим, амплітудну функцію прогинів і три її перші похідні виражено через безрозмірні функції $w_0(r), \tilde{w}_0(r), \widehat{w}_0(r), \hat{w}_0(r)$. При цьому формули для динамічних переміщень (2), (31) і для динамічних зусиль (32)-(34) з урахуванням (35), (37), (39), (41) постануть у вигляді:

$$W(r,t) = a\, w_0(r) T(t); \tag{44}$$

$$\varphi(r,t) = \tilde{w}_0(r) T(t); \tag{45}$$

$$M_r(r,t) = -\frac{D}{a}\left(\widehat{w}_0(r) + \mu \frac{a}{r} \tilde{w}_0(r) \right) T(t); \tag{46}$$

$$M_\theta(r,t) = -\frac{D}{a}\left(\mu\, \widehat{w}_0(r) + \frac{a}{r} \tilde{w}_0(r) \right) T(t); \tag{47}$$

$$Q_r(r,t) = -\frac{D}{a^2}\left(\hat{w}_0(r) + \frac{a}{r} \widehat{w}_0(r) - \left(\frac{a}{r}\right)^2 \tilde{w}_0(r) \right) T(t). \tag{48}$$

У результаті можемо констатувати, що динамічні переміщення $W(r,t), \varphi(r,t)$ і внутрішні зусилля $M_r(r,t), M_\theta(r,t), Q_r(r,t)$ виражені через безрозмірні фундаментальні функції $X_n(r)\ (n = 1, 2)$ та їхні безрозмірні похідні. Це дає можливість під час розрахунків пластин на коливання оперувати тільки безрозмірними величинами.

Безпосередньо з рівності (6) знаходимо:

$$\omega = \frac{\Omega}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}. \tag{49}$$

Формула (49) встановлює аналітичну залежність частоти коливань ω від інших параметрів механічної системи, що розглядається. Фактично визначення ω зводиться до відшукання безрозмірної частоти Ω. Оскільки фундаментальні функції $X_n(r)\ (n = 1, 2)$, а також їхні безрозмірні похідні, залежать саме від безрозмірної частоти, то для її знаходження слугуватимуть частотні рівняння, які отримаємо після реалізації заданих граничних умов.

Приклад. Приведемо тут результати розрахунку для суцільної бетонної плити з жорстко закріпленим контуром, що опирається на пружну основу з квадратичною неоднорідністю:

$$k(r) = k(a)\left(\frac{r}{a}\right)^2.$$

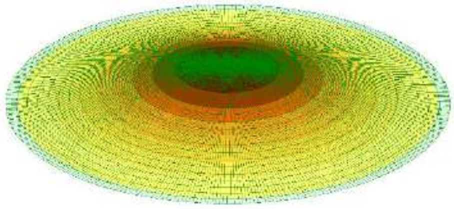
Вихідні дані для розрахунку:

$E = 3 \cdot 10^7\ кПа$; $\mu = 1/6$; $\rho = 2500\, кг/м^3$; $a = 6\, м$; $h = 0{,}3\, м$; $k(a) = 4 \cdot 10^3 kN/m^3$.

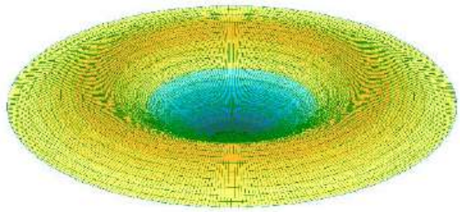
З метою верифікації авторського АМ, відповідні розрахунки також проведено МСЕ в програмному комплексі ЛІРА. Результати обчислень в числовому форматі представлено в табл. 1, а в графічному – на рис. 3.

Таблиця 1 – Значення частот вільних осесиметричних коливань

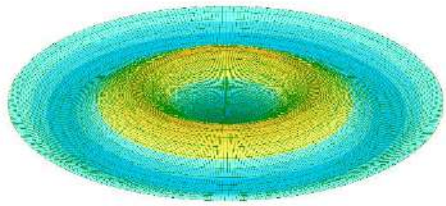
№ форми	Частоти коливань ω, рад/с		Відносна похибка, %
	АМ	МСЕ	
1	27,574622	27,669075	0,34
2	107,350531	102,780000	4,26
3	240,510460	228,970000	4,80
4	426,971819	405,900000	4,93
5	666,721322	633,400000	4,00



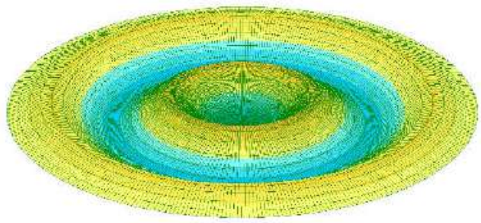
а) перша форма



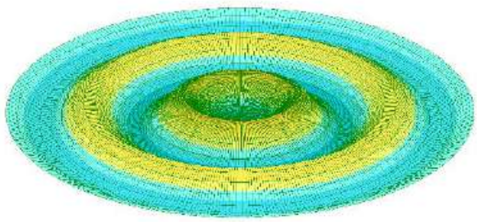
б) друга форма



в) третя форма



г) четверта форма



д) п'ята форма

Рис. 3. Перші п'ять осесиметричних форм коливань

Висновки:

1. Запропоновано аналітичний метод розрахунку на вільні осесиметричні коливання круглих суцільних пластин на степенево-змінній пружній основі. Даний метод не вимагає дискретизації конструкції і є реальною альтернативою застосуванню наближених методів при розв'язанні даного класу задач.

2. Будучи заснованим на точному розв'язку диференціального рівняння, метод дає змогу одержати достовірнішу картину коливань порівняно з наближеними методами. Адже саме точний розв'язок несе в собі інформацію якісного характеру і формує найповнішу картину фізичного явища, що вивчається.

3. Чисельно визначено похибку розрахунків МСЕ у програмному комплексі ЛІРА для конструкції що розглядалася.

4. Перспективи подальших досліджень автори пов'язують з дослідженням інших випадків, коли неоднорідність пружної основи описується законами зміни коефіцієнта постелі, відсутніми в науковій літературі.

Література

1. Foyouzat M. A., Mofid M., Akin J. E. Free vibration of thin circular plates resting on an elastic foundation with a variable modulus. *Journal of Engineering Mechanics*. 2016. Vol. 142, № 4. https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001050

2. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. Theory of plates and shells. New York: McGraw-Hill, 1959. 580 p.

3. Timoshenko S. Vibration problems in engineering. 3rd ed. New York: Van Nostrand, 1955. 468 p.

4. Вайнберг Д. В., Вайнберг Є. Д. Розрахунок пластин. К.: Будівельник, 1970. 264 с.

5. Krutii Yu. S., Sur'yaninov M. G., Karnaukhova G. S. Calculation method for axisymmetric bending of circular and annular plates on a changeable elastic bed. Part 1. Analytical relations. *Strength of Materials*. 2021. Vol. 53, № 2. P. 247–257. https://doi.org/10.1007/s11223-021-00282-2

6. Krutii Y. S., Sur'yaninov M. G., Soroka M. M., et al. Calculation method for axisymmetric bending of circular and annular plates on a changeable elastic bed. Part 2. Calculation results for continuous circular plates. *Strength of Materials*. 2021. Vol. 53, № 3. P. 417–422. https://doi.org/10.1007/s11223-021-00301-2

7. Laura P. A. A., Gutierrez R. H., Carnicer R., Sanzi H. C. Free vibrations of a solid circular plate of linearly varying thickness and attached to a Winkler foundation. *Journal of Sound and Vibration*. 1991. Vol. 144, № 1. P. 149–161. https://doi.org/10.1016/0022-460X(91)90738-6

8. Girgin Z. Canan, Girgin Konuralp. A numerical method for static or dynamic stiffness matrix of non-uniform members resting on variable elastic foundations. *Engineering Structures*. 2005. Vol. 27, № 9. P. 1373–1384. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2005.04.005

9. Mirkhalaf Valashani S. M. Transverse vibration of clamped and simply supported circular plates with an eccentric circular perforation and attached concentrated mass. *Journal of Solid Mechanics*. 2009. Vol. 1, № 1. P. 37–44.

10. Rao L. B., Rao C. K. Vibrations of Elastically Restrained Circular Plates Resting on Partial Winkler Foundation. *Arabian Journal for Science and Engineering*. 2009. Vol. 34, № 1B. P. 68–74. https://doi.org/10.2174/1874837600902010068

11. Haido James H., Bakar Badorul Hisham Abu, Abdul-Razzak Ayad A., Jayaprakash J. Dynamic Performance of Circular Reinforced Concrete Slabs. *Gaza Conference*, Gaza. October 2010. URL: https://www.researchgate.net/publication/328149106 (дата звернення: 10.05.2025).

12. Alipour M.M., Shariyat M., Shaban M. A Semi-Analytical Solution for Free Vibration and Modal Stress Analyses of Circular Plates Resting on Two-Parameter Elastic Foundations. *Journal of Solid Mechanics*. 2010. Vol. 2, № 1. P. 63–78.

13. Rao L. B., Rao C. K. Free Vibration of Circular Plates with Elastic Edge Support and Resting on an Elastic Foundation. *International Journal of Acoustics and Vibrations*. 2012. Vol. 17, № 4. P. 204–207. https://doi.org/0.20855/ijav.2012.17.4311

14. Rao L. B., Rao C. K. Vibrations of Circular Plates with Guided Edge and Resting on Elastic Foundation. *Journal of Sound and Vibration*. 2012. Vol. 331, № 24. P. 5300–5315.

15. Tufoi Marius, Gillich Gilbert-Rainer, Praisach Zeno-Iosif, Ntakpe Jean Loius, Hatiegan Cornel. An Analysis of the Dynamic Behavior of Circular Plates from a Damage Detection Perspective. *Romanian Journal of Acoustics and Vibration*. 2014. Vol. 11, № 1. P. 41–46.

16. Rao L. B., Rao C. K. Vibrations of Circular Plates with Elastically Restrained Edge against Translation and Resting on Elastic Foundation. *Journal of Engineering Research*. 2016. Vol. 13, № 2. P. 187–196. https://doi.org/10.24200/tjer.vol15iss1pp14-25

17. Rao L. B., Rao C. K. Vibrations of Circular Plates Resting on Elastic Foundation with Elastically Restrained Edge Against Translation. *The Journal of Engineering Research*. 2018. Vol. 15, № 1. P. 14–25. https://doi.org/10.24200/tjer.vol15iss1pp14-25

18. Salawu S. A., Sobamowo M. G., Sadiq O. M. Analytical approach into dynamic behavior of functionally graded circular plates resting on two–parameter foundations under excitation force. *The Scientific World Journal*. 2019. Vol. 139, № 2. P. 115–134.

https://doi.org/10.24200/tjer.vol15iss1pp14-25

19. Salawu S. A., Sobamowo M. G., Sadiq O. M. Dynamic Investigation of Nonlinear Free Vibration of Circular Plates Resting on Winkler and Pasternak Foundations. *International Journal of Mechanical Handling and Automation*. 2019. Vol. 5, № 2. P. 19–42.

20. Salawu S. A., Sobamowo M. G., Sadiq O. M. Investigation of Dynamic Behaviour of Circular Plates Resting on Winkler and Pasternak Foundations. *Annals of Faculty Engineering Hunedoara – International Journal of Engineering*. 2019. Vol. XVII, № 4. P. 125–136.

21. Sobamowo M. G., Salawu S. A. Free Vibration Analysis of Nonlinear Circular Plates Resting on Winkler and Pasternak Foundations. *Journal of Solid Mechanics*. 2020. Vol. 12, № 1. P. 121–135.

22. Крутій Ю. С. Розробка методу розв’язання задач стійкості і коливань деформівних систем зі змінними неперервними параметрами: Дис. д-ра техн. наук. Луцький національний технічний університет. Луцьк, 2016.

References

[1] M.A. Foyouzat, M. Mofid, J.E. Akin, "Free vibration of thin circular plates resting on an elastic foundation with a variable modulus", *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 142, no. 4, 2016. https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001050

[2] S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, *Theory of plates and shells*. New York: McGraw-Hill, 1959.

[3] S. Timoshenko, *Vibration problems in engineering*. 3rd ed. New York : Van Nostrand, 1955.

[4] D.V. Vainberh, Ye.D. Vainberh, *Rozrakhunok plastyn*. K.: Budivelnyk, 1970.

[5] Yu.S. Krutii, M.G. Sur’yaninov, G.S. Karnaukhova, "Calculation method for axisymmetric bending of circular and annular plates on a changeable elastic bed. Part 1. Analytical relations", *Strength of Materials*, vol. 53, no. 2, pp. 247–257, 2021. https://doi.org/10.1007/s11223-021-00282-2

[6] Y.S. Krutii, M.G. Sur’yaninov, M.M. Soroka et al., "Calculation method for axisymmetric bending of circular and annular plates on a changeable elastic bed. Part 2. Calculation results for continuous circular plates", *Strength of Materials*, vol. 53, no. 3, pp. 417–422, 2021. https://doi.org/10.1007/s11223-021-00301-2

[7] P.A.A. Laura, R.H. Gutierrez, R. Carnicer, H.C. Sanzi, "Free vibrations of a solid circular plate of linearly varying thickness and attached to a Winkler foundation", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 144, no 1, pp. 149–161, 1991. https://doi.org/10.1016/0022-460X(91)90738-6

[8] Girgin Z. Canan, Girgin Konuralp, "A numerical method for static or dynamic stiffness matrix of non-uniform members resting on variable elastic foundations", *Engineering Structures*, vol. 27, no 9, pp. 1373–1384, 2005. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2005.04.005

[9] S.M. Mirkhalaf Valashani, "Transverse vibration of clamped and simply supported circular plates with an eccentric circular perforation and attached concentrated mass", *Journal of Solid Mechanics*, vol. 1, no. 1, pp. 37–44, 2009.

[10] L.B. Rao, C.K. Rao, "Vibrations of Elastically Restrained Circular Plates Resting on Partial Winkler Foundation", *Arabian Journal for Science and Engineering*, vol. 34, no. 1B, pp. 68–74, 2009. https://doi.org/10.2174/1874837600902010068

[11] H. Haido James, Bakar Badorul Hisham Abu, Abdul-Razzak Ayad A., J. Jayaprakash, "Dynamic Performance of Circular Reinforced Concrete Slabs", *Gaza Conference*, Gaza. October 2010. [Online]. Available: https://www.researchgate.net/publication/328149106 Accessed on: May 10, 2025.

[12] M.M. Alipour, M. Shariyat, M.A Shaban, "Semi-Analytical Solution for Free Vibration and Modal Stress Analyses of Circular Plates Resting on Two-Parameter Elastic Foundations", *Journal of Solid Mechanic*, vol. 2, no. 1, pp. 63–78, 2010.

[13] L.B. Rao, C.K. Rao, "Free Vibration of Circular Plates with Elastic Edge Support and Resting on an Elastic Foundation", *International Journal of Acoustics and Vibrations*, vol. 17, no. 4, pp. 204–207, 2012. https://doi.org/0.20855/ijav.2012.17.4311

[14] L.B. Rao, C.K. Rao, "Vibrations of Circular Plates with Guided Edge and Resting on Elastic Foundation", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 331, no. 24, pp. 5300–5315, 2012.

[15] Tufoi Marius, Gillich Gilbert-Rainer, Praisach Zeno-Iosif, Ntakpe Jean Loius, Hatiegan Cornel, "An Analysis of the Dynamic Behavior of Circular Plates from a Damage Detection Perspective", *Romanian Journal of Acoustics and Vibration*, vol. 11, no. 1, pp. 41–46, 2014.

[16] L.B. Rao, C.K. Rao, "Vibrations of Circular Plates with Elastically Restrained Edge against Translation and Resting on Elastic Foundation", *Journal of Engineering Research*, vol. 13, no. 2, pp. 187–196, 2016. https://doi.org/10.24200/tjer.vol15iss1pp14-25

[17] L.B. Rao, C.K. Rao, "Vibrations of Circular Plates Resting on Elastic Foundation with Elastically Restrained Edge Against Translation", *The Journal of Engineering Research*, vol. 15, no. 1, pp. 14–25, 2018. https://doi.org/10.24200/tjer.vol15iss1pp14-25

[18] S.A. Salawu, M.G. Sobamowo, O.M. Sadiq, "Analytical approach into dynamic behavior of functionally graded circular plates resting on two–parameter foundations under excitation force", *The Scientific World Journal*, vol. 139, no. 2, pp. 115–134, 2019. https://doi.org/10.24200/tjer.vol15iss1pp14-25

[19] S.A., Salawu, M.G. Sobamowo, O.M. Sadiq, "Dynamic Investigation of Nonlinear Free Vibration of Circular Plates Resting on Winkler and Pasternak Foundations", *International Journal of Mechanical Handling and Automation*, vol. 5, no. 2, pp. 19–42, 2019.

[20] S.A. Salawu, M.G. Sobamowo, O.M. Sadiq, "Investigation of Dynamic Behaviour of Circular Plates Resting on Winkler and Pasternak Foundations", *Annals of Faculty Engineering Hunedoara – International Journal of Engineering*, vol. XVII, no. 4, pp. 125–136, 2019.

[21] M.G. Sobamowo, S.A. Salawu, "Free Vibration Analysis of Nonlinear Circular Plates Resting on Winkler and Pasternak Foundations", *Journal of Solid Mechanics*, vol. 12, no. 1, pp. 121–135, 2020.

[22] Yu.S. Krutii, "Rozrobka metodu rozviazannia zadach stiikosti i kolyvan deformivnykh system zi zminnymy neperervnymy parametramy: Dis. d-ra tekhn. nauk", Lutsk National Technical University, Lutsk, 2016.

CALCULATION OF FREE AXISYMMETRIC VIBRATIONS OF CIRCULAR PLATES SUPPORTED BY A POWER-VARIABLE ELASTIC WINKLER BASE

[1]**Krutii Yu.S.,** Dr. Sc., Professor,
yurii.krutii@gmail.com, ORCID: 0000-0001-7105-3087
[1]**Perperi A.O.,** Ph.D., Associate Professor,
a.perperi@odaba.edu.ua, ORCID: 0000-0001-7112-6864
[1]**Velychko D.V.,** postgraduate,
velychko.engineer@gmail.com, ORCID: 0000-0002-7837-872X
[1]*Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture*
4, Didrikhson str., Odesa, 65029, Ukraine

Abstract. This publication is about further development of analytical methods for calculating free vibrations of circular plates resting on an inhomogeneous continuous elastic Winkler foundation. The inhomogeneity of the elastic foundation is described by a variable subgrade modulus. The case of subgrade modulus represented by a power function is considered. The fundamental functions of the corresponding vibration equation for circular solid plates are written down in an explicit closed form. These functions are dimensionless and are represented by absolutely and uniformly convergent double power series. In turn, these functions are used to express the formulas for the dynamic parameters of the plate state, such as deflection, angle of rotation, radial and circular bending moments, and shear force. An analytical representation for the frequency of free vibrations of the plate is obtained, which establishes its dependence on the dimensionless frequency and other mechanical parameters of the system. The dimensionless frequency, in turn, is determined from the frequency equations, which are obtained after the implementation of the specified boundary conditions.

The practical application of the obtained solutions is demonstrated by an example. A concrete slab with a rigidly fixed contour resting on a power-variable elastic foundation is examined. The first five frequencies of axisymmetric vibrations are calculated by the authors' method (AM). The corresponding first five modes are also presented in graphical format. The numerical values obtained by AM are treated as accurate, since the used calculation method is based on the exact solution of the corresponding differential equation. The availability of such solutions makes it possible to evaluate the accuracy of calculations obtained using various approximate methods by comparison. For the purpose of such a comparison, the paper presents the results of the calculation obtained by the finite element method (FEM). The relative error of the FEM in the calculation of this structure is determined.

Keywords: circular plate, inhomogeneous base, Winkler's hypothesis, variable bedding coefficient, axisymmetric vibrations, analytical solution.

Стаття надійшла до редакції 12.05.2025