

АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНИХ БАЛОК, ЩО ОПИРАЮТЬСЯ НА ПРУЖНУ ОСНОВУ ВІНКЛЕРА

¹**Перпері А.О.**, к.т.н., доцент,
a.perperi@odaba.edu.ua, ORCID: 0000-0001-7112-6864

¹**Вакуленко В.В.**, аспірант,
91vvv19@gmail.com, ORCID: 0009-0008-4410-7666

¹*Одеська державна академія будівництва та архітектури*
вул. Дідріхсона, 4, м. Одеса, 65029, Україна

Анотація. В даній публікації розглядаються так звані функціонально градієнтні балки (ФГБ) з властивостями матеріалу, що змінюються уздовж довжини з певним градієнтом. Робота присвячена розробці аналітичного методу розрахунку на згин вказаних балок, що опираються на однорідну суцільну пружну основу Вінклера. Модуль пружності матеріалу та навантаження вважаються довільними змінними неперервними функціями, що залежать від координати серединної осі балки. В основі розробленого авторського методу (АМ) лежить точний розв'язок відповідного звичайного неоднорідного диференціального рівняння згину четвертого порядку зі змінними коефіцієнтами. Невідомі константи інтегрування тут виражені через початкові параметри, які знаходяться після реалізації заданих граничних умов. Фундаментальні функції та частинний розв'язок диференціального рівняння представляються у вигляді рядів по степеням безрозмірного параметру зі змінними коефіцієнтами, які визначаються за допомогою рекурентних інтегральних співвідношень. Для зручності практичного застосування фундаментальні функції та частинний розв'язок рівняння трансформуються до формату степеневих рядів. Тим самим, розрахунок ФГБ на згин зводиться до процедури чисельної реалізації явних аналітичних формул для параметрів напружено-деформованого стану.

На прикладі продемонстровано практичне застосування АМ. Розглянуто призматичну ФГБ, модуль пружності якої змінюється за параболическим законом. Результати розрахунку АМ представлені в чисельному та графічному форматах для випадку, коли лівий кінець балки шарнірно опертий, а правий затиснутий. Отримані чисельні значення трактуються як точні, оскільки розрахунок ґрунтується на точному розв'язку відповідного диференціального рівняння. Наявність такого методу дозволить оцінювати точність розв'язків, отриманих за допомогою різного роду наближених методів. З метою верифікації розрахунків АМ, надані також відповідні розв'язки, які отримані методом скінченних елементів (МСЕ) в ПК ЛІРА-САПР. Порівняння свідчить про валідність АМ.

Ключові слова: функціонально-градієнтна балка, пружна основа, точний розв'язок, аналітичний метод.

Вступ. В наш час широке застосування у різних галузях науки і техніки знаходять конструкції з функціонально-градієнтних матеріалів [1-6]. Так називають композиційні матеріали, які створюються шляхом зміни мікроструктури від одного матеріалу до іншого з заданим градієнтом. Подібні матеріали розробляються таким чином, щоби їм були притаманні певні наперед задані властивості. Наприклад, мова може йти про термічну або корозійну стійкість, пластичність, в'язкість та інші.

Серед великого різноманіття конструкцій, важливим класом є ФГБ з властивостями матеріалу, що змінюються уздовж довжини. Такі композити характеризуються змінними параметрами, такими, як пружність, щільність, теплопровідність та інші. Зокрема, згинальна жорсткість таких балок також буде змінною уздовж довжини. Внаслідок цього, як зазначається в [7], при розрахунках таких балок на коливання важко отримати точні розв'язки із-за змінності коефіцієнтів у відповідному диференціальному рівнянні. З такої ж причини важко

отримати точні розв'язки і при розв'язанні інших завдань, наприклад, при розрахунках вказаних балок на стійкість чи на згин. Напевно саме тому у сучасних дослідженнях, присвячених різного роду розрахункам ФГБ, застосовуються наближені методи. Однак зрозуміло, що тільки точні розв'язки дозволяють отримати інформацію якісного характеру та сформувати найбільш достовірну картину напружено-деформованого стану балки. Тому проблема аналітичного розрахунку ФГБ, який ґрунтується на точному розв'язку відповідного диференціального рівняння згину, є актуальною.

Дана робота присвячена аналітичному методу розрахунку ФГБ на згин у випадку, коли модуль пружності та навантаження задані будь-якими неперервними функціями.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Серед численних публікацій, присвячених різного роду розрахункам ФГБ на пружній основі слід виділити роботи [8-12].

В статті [8] МСЕ досліджується реакція конічних консольних ФГБ на великі переміщення. Вважається, що матеріал балки має градієнт у поздовжньому напрямку за степеневим законом. Числові результати показують, що реакція балки на великі переміщення визначається законом розподілу матеріалу та коефіцієнтом конусності. Осьове переміщення на вільному кінці балки найбільш чутливе до коефіцієнта конусності, а поперечне переміщення найменше залежить від цього параметра. Також досліджується вплив відношення довжини до висоти балки. Автори [9] представили комплексну теоретичну модель для дослідження згину, стійкості та власних коливань функціонально-градієнтних нанобалок, що опираються на пружну основу, застосувавши нелокальну теорію градієнта деформації. Для балок Тимошенка та Ейлера-Бернуллі у замкненій формі отримані аналітичні вирази для прогинів, частот та критичних сил нанобалок. Порівняння отриманих результатів з раніше відомими даними підтверджують коректність та високу точність запропонованої моделі. В публікації [10] розроблено універсальний чисельний метод для аналізу статичних і динамічних реакцій ФГБ з довільними змінними поперечними перерізами, матеріалами, фундаментами, навантаженнями та загальними граничними умовами. Всі перераховані змінні параметри задачі дискретизуються методом Гауса-Лобатто, а потім апроксимуються рядами по поліномам Чебишева високого порядку. Дискретне рівняння спектральних елементів балки виведено за допомогою рівняння Лагранжа та теорії балок Ейлера-Бернуллі. Для визначення спектральних елементів Чебишева та обробки граничних умов і сумісності між елементами введено проєкційні матриці. Для перевірки запропонованого методу проведено числові експерименти з урахуванням різних неоднорідних матеріалів, граничних умов, фундаментів, поперечних перерізів та навантажень. Збіжність та точність запропонованого методу були перевірені шляхом порівняння результатів розрахунків з розв'язками, знайденими в літературі та отриманими за допомогою МСЕ. У статті [11] представлено новий підхід до аналізу ФГБ з пористістю, що опираються на пружні основи. Запропоновано новий змішаний балочний скінченний елемент що включає узагальнену поперечну жорсткість та параболический розподіл напружень. Запропонований балочний елемент забезпечує швидку збіжність, адже для отримання точних результатів у порівнянні з існуючими моделями достатньо задіяти всього 1-2 елемента. Тому він є надійним числовим інструментом для аналізу ФГБ. Дослідження [12] присвячено аналізу поведінки ФГБ на пружній основі. Балка моделюється з використанням змішаного підходу, де поєднуються параметри зсуву та компоненти напружень як основні змінні, що забезпечує високу точність та швидку збіжність МСЕ. Пружну основу представлено за допомогою моделі Вінклера та дво-параметричної моделі Пастернака. Проводяться дослідження для вивчення впливу співвідношення довжини до товщини, граничних умов, коефіцієнту жорсткості фундаменту та геометричних параметрів на прогини балки. Результати демонструють ефективність і точність змішаного скінчено-елементного підходу для дослідження складної взаємодії між балкою та пружним фундаментом. Дане дослідження надає надійний інструмент для проектування та аналізу функціонально-градієнтних балок на пружній основі.

Отже, для різного роду розрахунків ФГБ на пружній основі застосовують виключно наближені методи. Аналітичний метод для статичного розрахунку ФГБ, в основі якого лежить точний розв'язок відповідного диференціального рівняння, в науковій літературі відсутній.

Мета та завдання. Мета дослідження – розвиток аналітичних методів розрахунку ФГБ, що опираються на пружну основу.

Завдання дослідження:

– розробити аналітичний методу для статичного розрахунку ФГБ сталого перерізу, що опираються на однорідну суцільну пружну основу Вінклера, для випадку довільних неперервно-змінних модуля пружності та навантаження;

– перевірити валідність АМ шляхом порівняння розрахунків для конкретного прикладу з відповідними розв'язками МСЕ.

Матеріали та методика дослідження. При розробці АМ використовувались теорія функціональних рядів та теорія звичайних диференціальних рівнянь. В основі АМ лежить точний розв'язок диференціального рівняння згину ФГБ, який знайдено методом прямого інтегрування [13]. Також застосовувався МСЕ, який реалізовано в ПК ЛІРА-САПР.

Результати досліджень. Розглядається задача про згин ФГБ, що опирається на однорідну суцільну пружну основу Вінклера. Відповідна розрахункова схема зображена на рис. 1, де $q(x)$ – задане розподілене змінне поперечне навантаження, $y(x)$ – прогин (просадка основи), $\varphi(x)$ – кут повороту.

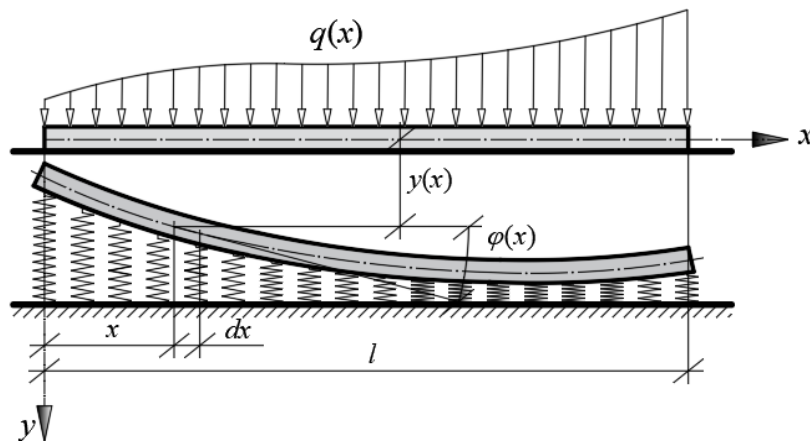


Рис. 1. Розрахункова схема балки

Для модуля пружності балки $E(x)$ та навантаження $q(x)$ приймаємо форму запису:

$$E(x) = E_0 A(x); \quad q(x) = q_0 C(x), \quad (1)$$

де E_0 , q_0 – модуль пружності та навантаження у певній характерній точці балки (наприклад, в перерізі $x = 0$), а $A(x)$, $C(x)$ – безрозмірні функції, що виражають відповідно закони зміни модуля пружності та навантаження удовж осі балки.

Диференціальне рівняння згину балки має вигляд:

$$E_0 I (A(x) y''(x))'' + k y(x) = q_0 C(x), \quad (2)$$

де I – момент інерції її поперечного перерізу, k – погонний коефіцієнт постелі. Після визначення з цього рівняння функції прогинів $y(x)$, інші параметри напружено-деформованого стану (НДС) балки, такі як кут повороту $\varphi(x)$, згинальний момент $M(x)$ та поперечна сила $Q(x)$ визначаються за відомими з теорії згину балок формулами:

$$\varphi(x) = y'(x); \quad M(x) = -E_0 I A(x) y''(x); \quad Q(x) = -E_0 I (A(x) y''(x))'. \quad (3)$$

Точний розв'язок диференціального рівняння (2) можна знайти за допомогою методу прямого інтегрування, який розвинуто в [13]. Застосування цього методу проілюстровано у низці публікацій, серед яких відзначимо [14-16]. Зокрема, в [16] побудовано точний розв'язок

диференціального рівняння, подібного (2). Відмінність полягає в тому, що там розглянуто згин балки сталої жорсткості на неоднорідній пружній основі Вінклера. При цьому неоднорідність основи характеризується довільним неперервно-змінним коефіцієнтом постелі. Щоб не повторювати однотипну процедуру методу прямого інтегрування, запишемо тільки кінцеві формули, якими визначається точний розв'язок рівняння (2):

$$y(x) = y(0)X_1(x) + \varphi(0)lX_2(x) - M(0)\frac{l^2}{E_0I}X_3(x) - Q(0)\frac{l^3}{E_0I}X_4(x) + \frac{q_0l^4}{E_0I}X_5(x); \quad (4)$$

$$X_n(x) = \beta_{n,0}(x) - K\beta_{n,1}(x) + K^2\beta_{n,2}(x) - K^3\beta_{n,3}(x) + \dots \quad (n=1,2,3,4,5); \quad (5)$$

$$K = \frac{kl^4}{E_0I};$$

$$\beta_{n,0}(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{n-1} \quad (n=1,2); \quad \beta_{n,0}(x) = \frac{1}{l^2} \int_0^x \int_0^x \frac{1}{A(x)} \left(\frac{x}{l}\right)^{n-3} dx dx \quad (n=3,4); \quad (6)$$

$$\beta_{5,0}(x) = \frac{1}{l^4} \int_0^x \int_0^x \frac{1}{A(x)} \int_0^x \int_0^x C(x) dx dx dx dx; \quad (7)$$

$$\beta_{n,k}(x) = \frac{1}{l^4} \int_0^x \int_0^x \frac{1}{A(x)} \int_0^x \int_0^x \beta_{n,k-1}(x) dx dx dx dx \quad (n=1,2,3,4,5) (k=1,2,3,\dots). \quad (8)$$

Важливо зауважити, що функції (5) безрозмірні [13]. Константи інтегрування в (4) виражені через так звані початкові параметри $y(0), \varphi(0), M(0), Q(0)$, які визначатимуться в кожному конкретному випадку із заданих граничних умов.

Знаючи функцію прогинів (4) та користуючись (3), можемо записати формули для визначення інших параметрів НДС балки:

$$\varphi(x) = y(0)\frac{1}{l}\tilde{X}_1(x) + \varphi(0)\tilde{X}_2(x) - M(0)\frac{l}{E_0I}\tilde{X}_3(x) - Q(0)\frac{l^2}{E_0I}\tilde{X}_4(x) + \frac{q_0l^3}{E_0I}\tilde{X}_5(x); \quad (9)$$

$$M(x) = -y(0)\frac{E_0I}{l^2}\hat{X}_1(x) - \varphi(0)\frac{E_0I}{l}\hat{X}_2(x) + M(0)\hat{X}_3(x) + Q(0)l\hat{X}_4(x) - q_0l^2\hat{X}_5(x); \quad (10)$$

$$Q(x) = -y(0)\frac{E_0I}{l^3}\hat{X}_1(x) - \varphi(0)\frac{E_0I}{l^2}\hat{X}_2(x) + M(0)\frac{1}{l}\hat{X}_3(x) + Q(0)\hat{X}_4(x) - q_0l\hat{X}_5(x), \quad (11)$$

де $\tilde{X}_n(x) = lX'_n(x)$; $\hat{X}_n(x) = l^2A(x)X''_n(x)$; $\hat{X}_n(x) = l^3(A(x)X''_n(x))'$ ($n=1,2,3,4,5$) – безрозмірні функції [13].

Після апроксимації функцій $f(x) = 1/A(x)$ та $C(x)$ рядами Маклорена:

$$f(x) = A_0 + A_1\left(\frac{x}{l}\right) + A_2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \dots + A_j\left(\frac{x}{l}\right)^j + \dots, \quad (12)$$

$$C(x) = C_0 + C_1\left(\frac{x}{l}\right) + C_2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \dots + C_j\left(\frac{x}{l}\right)^j + \dots, \quad (13)$$

формули (5)-(8) трансформуються до виду, більш зручного для практичного застосування:

$$X_n(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k c_{n,k,j} \left(\frac{x}{l}\right)^{4k+j} \quad (n=1,2,3,4,5); \quad (14)$$

$$c_{n,0,0} = 1; \quad c_{n,0,j} = 0 \quad (n=1,2) (j=1,2,3,\dots); \quad (15)$$

$$c_{n,0,j} = \frac{A_j}{(n+j-2)(n+j-1)} \quad (n=3,4) (j=0,1,2,\dots); \quad (16)$$

$$c_{5,0,j} = \frac{1}{(j+3)(j+4)} \sum_{i=0}^j \frac{A_{j-i}C_i}{(i+1)(i+2)} \quad (j=0,1,2,\dots); \quad (17)$$

$$c_{n,k,j} = \frac{1}{(n+4k+j-2)(n+4k+j-1)} \sum_{i=0}^j \frac{A_{j-i} c_{n,k-1,i}}{(n+4k+i-4)(n+4k+i-3)} \quad (18)$$

$$(n=1,2,3,4,5)(k=1,2,3,\dots)(j=0,1,2,\dots).$$

Таким чином, формулами (4), (9)-(18) фактично визначено новий аналітичний метод для статичного розрахунку ФГБ на однорідній суцільній пружній основі Вінклера.

Для реалізації розробленого методу створено відповідний програмний код на Visual Basic в програмному середовищі Excel. Тим самим, забезпечено можливість розрахунку ФГБ у програмному режимі.

Приклад. Розглянемо призматичну ФГБ, лівий кінець якої шарнірно опертий, а правий затиснутий (рис. 2). Діюче на балку змінне навантаження задано законом синуса:

$$q(x) = q \left(\frac{l}{2} \right) \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (19)$$

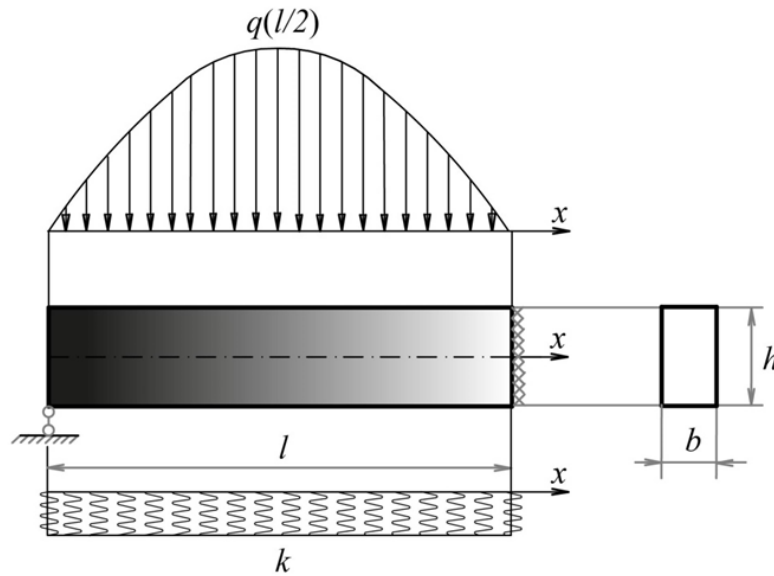


Рис. 2. Розрахункова схема балки

Балка виготовлена з двох компонентів, а саме, з цирконію ZrO_2 та алюмінію Al . Модуль пружності балки змінюється за параболічним законом:

$$E(x) = E_{Zr} - (E_{Zr} - E_{Al}) \left(\frac{x}{l} \right)^2, \quad (20)$$

де E_{Zr} , E_{Al} – відповідно модулі пружності цирконію та алюмінію. Подібні балки знаходять застосування у різних галузях інженерії, в тому числі в аерокосмічному будівництві [10].

Граничні умови у даному випадку запишуться так: $y(0) = 0$; $M(0) = 0$; $y(l) = 0$; $\varphi(l) = 0$. Отже, два початкові параметри $y(0)$, $M(0)$ уже відомі. Інші два $\varphi(0)$, $Q(0)$ знайдемо із системи рівнянь, яку отримаємо після реалізації граничних умов на правому кінці $x=l$, скориставшись (4), (9). В підсумку для початкових параметрів матимемо:

$$y(0) = 0; \quad \varphi(0) = \frac{q_0 l^3}{E_0 I} \frac{X_4(l) \tilde{X}_5(l) - \tilde{X}_4(l) X_5(l)}{X_2(l) \tilde{X}_4(l) - \tilde{X}_2(l) X_4(l)}; \quad M(0) = 0; \quad Q(0) = q_0 l \frac{X_2(l) \tilde{X}_5(l) - \tilde{X}_2(l) X_5(l)}{X_2(l) \tilde{X}_4(l) - \tilde{X}_2(l) X_4(l)}.$$

Виходячи з (1), (19), (20), для даного випадку знаходимо:

$$E(x) = E_0 A(x); \quad E_0 = E_{Zr}; \quad A(x) = 1 - (1 - \delta) \left(\frac{x}{l} \right)^2; \quad \delta = \frac{E_{Al}}{E_{Zr}};$$

$$q_0 = q \left(\frac{l}{2} \right); \quad C(x) = \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Далі, скориставшись рядами Маклорена:

$$f(x) = 1 + (1-\delta)\left(\frac{x}{l}\right)^2 + (1-\delta)^2\left(\frac{x}{l}\right)^4 + (1-\delta)^3\left(\frac{x}{l}\right)^6 + \dots,$$

$$C(x) = \sin \frac{\pi x}{l} = \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi x}{l}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi x}{l}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{\pi x}{l}\right)^7 + \dots,$$

визначаємо коефіцієнти рядів (12), (13). Тут $A_0 = 1$, $C_0 = 0$, а інші значення визначаються в залежності від парності чи непарності індексу j :

$$A_j = 0; C_j = (-1)^{\frac{j+3}{2}} \frac{\pi^j}{j!} \text{ – для непарних значень } j = 1, 3, 5, \dots;$$

$$A_j = (1-\delta)^{j/2}; C_j = 0 \text{ – для парних значень } j = 2, 4, 6, \dots$$

Зауважимо, що для програмного обчислення коефіцієнтів ряду (13) при непарних j зручніше користуватись рівносильними рекурентними формулами:

$$C_1 = \pi, C_{j+2} = -\frac{\pi^2}{(j+1)(j+2)} C_j \quad (j = 1, 3, 5, \dots).$$

Вихідні дані для розрахунку: довжина балки $l = 4\text{ м}$; ширина підшви балки $b = 0,2\text{ м}$; висота балки $h = 0,3\text{ м}$; $q_0 = 100\text{ кН / м}$; $E_{Zr} = 2 \cdot 10^8\text{ кПа}$; $E_{Al} = 7 \cdot 10^7\text{ кПа}$; $k = 1000\text{ кН / м}^2$.

В програмному режимі виконано розрахунок, а саме, для двадцять одного перерізу обчислені значення параметрів НДС балки: прогину $y(x)$, кута повороту $\varphi(x)$, згинального моменту $M(x)$ та поперечної сили $Q(x)$. Результати розрахунку АМ представлені в чисельному та графічному форматі (див. табл. 1, 2 та рис. 3, 4). Для порівняння в табл. 1, 2 також надані результати розрахунку МСЕ у ПК ЛІРА-САПР.

Таблиця 1 – Значення кінематичних параметрів

x	$y(x)$, [мм]		Відносна похибка, %	$\varphi(x)$, [рад]		Відносна похибка, %
	АМ	МСЕ		АМ	МСЕ	
0	0,000000	0,000000	0,00	0,001493	0,001509	1,03
0,2	0,297262	0,300332	1,03	0,001472	0,001487	1,03
0,4	0,586132	0,592172	1,03	0,001410	0,001424	1,03
0,6	0,858411	0,867220	1,03	0,001307	0,001320	1,02
0,8	1,106279	1,117568	1,02	0,001166	0,001178	1,00
1	1,322493	1,335880	1,01	0,000991	0,001000	0,98
1,2	1,500569	1,515597	1,00	0,000785	0,000793	0,93
1,4	1,634976	1,651136	0,99	0,000555	0,000560	0,87
1,6	1,721323	1,738064	0,97	0,000306	0,000308	0,68
1,8	1,756556	1,773292	0,95	0,000045	0,000044	1,67
2	1,739150	1,755301	0,93	-0,000219	-0,000223	1,58
2,2	1,669326	1,684330	0,90	-0,000477	-0,000484	1,29
2,4	1,549282	1,562612	0,86	-0,000719	-0,000728	1,19
2,6	1,383459	1,394667	0,81	-0,000933	-0,000944	1,13
2,8	1,178859	1,187621	0,74	-0,001105	-0,001117	1,08
3	0,945460	0,951599	0,65	-0,001218	-0,001231	1,05
3,2	0,696763	0,700295	0,51	-0,001254	-0,001267	1,01
3,4	0,450576	0,451777	0,27	-0,001189	-0,001200	0,97
3,6	0,230190	0,229678	0,22	-0,000990	-0,000999	0,93
3,8	0,066258	0,065116	1,72	-0,000615	-0,000621	0,87
4	0,000000	0,000000	0,00	0,000000	0,000000	0,00

Таблиця 2 – Значення силових параметрів

x	$M(x), [\kappa Hm]$		Відносна похибка, %	$Q(x), [\kappa H]$		Відносна похибка, %
	AM	MCE		AM	MCE	
0	0,000000	0,000000	0,00	94,946557	96,035896	1,15
0,2	18,886709	19,103294	1,15	93,408780	94,477623	1,14
0,4	37,160826	37,585827	1,14	88,833209	89,841003	1,13
0,6	54,224802	54,842083	1,14	81,332187	82,240166	1,12
0,8	69,510798	70,296745	1,13	71,089873	71,862152	1,09
1	82,494625	83,418823	1,12	58,357698	58,962337	1,04
1,2	92,708602	93,734726	1,11	43,448174	43,858196	0,94
1,4	99,753031	100,839928	1,09	26,727194	26,921391	0,73
1,6	103,305991	104,408890	1,07	8,605034	8,568649	0,42
1,8	103,131219	104,203102	1,04	-10,473734	-10,748409	2,62
2	99,083895	100,076920	1,00	-30,041142	-30,554564	1,71
2,2	91,114179	91,981148	0,95	-49,617282	-50,362499	1,50
2,4	79,268435	79,964287	0,88	-68,722005	-69,684860	1,40
2,6	63,688105	64,171272	0,76	-86,886582	-88,046265	1,33
2,8	44,606287	44,839977	0,52	-103,665003	-104,994797	1,28
3	22,342120	22,295361	0,21	-118,644611	-120,113243	1,24
3,2	-2,706881	-3,058488	12,99	-131,455793	-133,029190	1,20
3,4	-30,074295	-30,748241	2,24	-141,780404	-143,423981	1,16
3,6	-59,235811	-60,242874	1,70	-149,358670	-151,040604	1,13
3,8	-89,621436	-90,966637	1,50	-153,994247	-155,689453	1,10
4	-120,628513	-122,312965	1,40	-155,557094	-157,252869	1,09

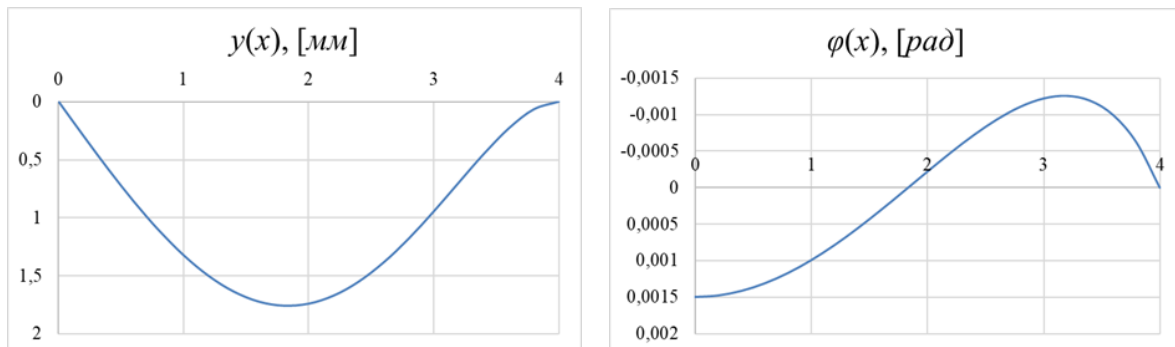


Рис. 3. Епюри кінематичних параметрів

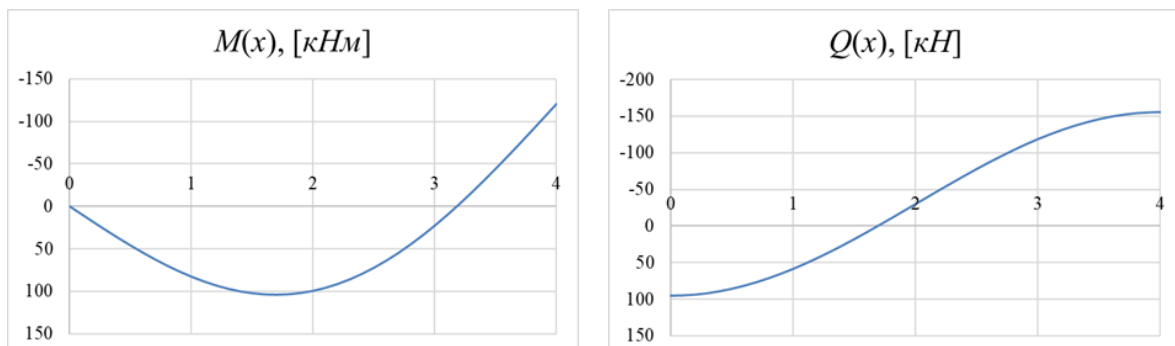


Рис. 4. Епюри силових параметрів

Висновки:

1. Запропонований АМ є ефективним у обчислювальному відношенні та дає можливість отримувати точні результати для статичних розрахунків ФГБ. Він не потребує дискретизації

конструкції та є реальною альтернативою застосуванню наближених методів при розв'язанні даного класу задач.

2. Ґрунтуючись на точному розв'язку, АМ дозволяє отримати більш достовірну картину НДС балки порівняно з наближеними методами. Впровадження такого методу в інженерну практику забезпечить більшу точність розрахунків.

3. Порівняння отриманих розрахунків з відповідними розв'язками, знайденими МСЕ у ПК ЛІРА-САПР засвідчує валідність АМ.

4. Перспективи подальших досліджень автори пов'язують із застосування АМ для статичних розрахунків реальних ФГБ з різними законами зміни коефіцієнта пружності та навантаження: лінійними, поліноміальними, степеневими, експоненціальними та іншими.

Література

1. Calim, F.F. Transient analysis of axially functionally graded Timoshenko beams with variable cross-section. *Composites Part B: Engineering*. 2016. 98. 472–483. URL: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.05.040>
2. Shafiei, N., Kazemi, M., & Ghadiri, M. Nonlinear vibration of axially functionally graded tapered microbeams. *International Journal of Engineering Science*. 2016. 102. 12–26. URL: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2016.02.007>
3. Lee, J.W., & Lee, J.Y. Free vibration analysis of functionally graded Bernoulli-Euler beams using an exact transfer matrix expression. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2017. 122. 1–17. URL: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.01.011>
4. Su, H., Banerjee, J.R., & Cheung, C.W. Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of functionally graded beams. *Composite Structures*. 2013. 106. 854–862. URL: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.06.029>
5. Jing, L.L., Ming, P.J., Zhang, W.P., Fu, L.R., & Cao, Y.P. Static and free vibration analysis of functionally graded beams by combination Timoshenko theory and finite volume method. *Composite structures*. 2016. 138. 192–213. URL: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.11.027>
6. Ait Atmane, H., Tounsi, A., Meftah, S.A., & Belhadj, H.A. Free vibration behavior of exponential functionally graded beams with varying cross-section. *Journal of Vibration and Control*. 2011. 17(2). 311–318. URL: <https://doi.org/10.1177/1077546310370691>
7. Cao, D., Wang, B., Hu, W., & Gao, Y. Free vibration of axially functionally graded beam. *Mechanics of functionally graded materials and structures*. IntechOpen. 2020. URL: <https://doi.org/10.5772/intechopen.85835>
8. Nguyen, D. K. Large displacement response of tapered cantilever beams made of axially functionally graded material. *Composites Part B: Engineering*. 2013. 55. 298–305. URL: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.06.024>
9. Hieu, D.V., Chan, D.Q., & Sedighi, H.M. Nonlinear bending, buckling and vibration of functionally graded nonlocal strain gradient nanobeams resting on an elastic foundation. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2021. 16(3). 327–346. URL: <https://doi.org/10.2140/jomms.2021.16.327>
10. Liu, H., Huang, Y., & Zhao, Y. A unified numerical approach to the dynamics of beams with longitudinally varying cross-sections, materials, foundations, and loads using Chebyshev spectral approximation. *Aerospace*. 2023. 10(10). 842. URL: <https://doi.org/10.3390/aerospace10100842>
11. Ghazwani, M.H. New enriched beam element for static bending analysis of functionally graded porous beams resting on elastic foundations. *Mechanics of Solids*. 2023. 58(5). 1878–1893. URL: <https://doi.org/10.3103/S0025654423600885>
12. Kaniğ, D., Bab, Y., Kutlu, A., & Omurtag, M. H. Mixed finite element formulation for functionally graded beams resting on elastic foundation using HSDT. In *4th international civil engineering & architecture conference* (pp. 2177–2183). Golden Light Publishing. 2025. URL: https://doi.org/10.31462/icearc2025_ce_sme_531
13. Крутій Ю. С. Розробка методу розв'язання задач стійкості і коливань деформівних систем зі змінними неперервними параметрами: дис. д-ра техн. наук: 01.02.04. Луцьк, 2016. 273 с.
14. Krutii, Y., Suriyaninov, M., & Vandynskyi, V. Exact solution of the differential equation

of transverse oscillations of the rod taking into account own weight. *MATEC Web of Conferences*. 2017. 116, 02022. URL: <https://doi.org/10.1051/mateconf/201711602022>

15. Krutii, Y.S. Construction of a solution of the problem of stability of a bar with arbitrary continuous parameters. *Journal of Mathematical Sciences*. 2018. 231(5). 665–677. URL: <https://doi.org/10.1007/s10958-018-3843-8>

16. Krutii, Y., Surianinov, M., Petrash, S., & Yezhov, M. Development of an analytical method for calculating beams on a variable elastic Winkler foundation. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2021. 1162(1). 012009. URL: <https://doi.org/10.1088/1757-899x/1162/1/012009>

References

- [1] F.F. Calim, "Transient analysis of axially functionally graded Timoshenko beams with variable cross-section", *Composites Part B: Engineering*, 98, 472–483, 2016. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.05.040>
- [2] N. Shafiei, M. Kazemi, & M. Ghadiri, "Nonlinear vibration of axially functionally graded tapered microbeams", *International Journal of Engineering Science*, 102, 12–26, 2016. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2016.02.007>
- [3] J.W. Lee, & J.Y. Lee, "Free vibration analysis of functionally graded Bernoulli-Euler beams using an exact transfer matrix expression", *International Journal of Mechanical Sciences*, 122, 1–17, 2017. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.01.011>
- [4] H. Su, J.R. Banerjee, & C.W. Cheung, "Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of functionally graded beams", *Composite Structures*, 106, 85–862, 2013. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.06.029>
- [5] L.L. Jing, P.J. Ming, W.P. Zhang, L.R. Fu, & Y.P. Cao, "Static and free vibration analysis of functionally graded beams by combination Timoshenko theory and finite volume method", *Composite structures*, 138, 192–213, 2016. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.11.027>
- [6] H. Ait Atmane, A. Tounsi, S.A. Meftah, & H.A. Belhadj, "Free vibration behavior of exponential functionally graded beams with varying cross-section", *Journal of Vibration and Control*, 17(2), 311–318, 2011. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1177/1077546310370691>
- [7] D. Cao, B. Wang, W. Hu, & Y. Gao, "Free vibration of axially functionally graded beam". *Mechanics of functionally graded materials and structures*, IntechOpen, 2020. [Online]. Available: <https://doi.org/10.5772/intechopen.85835>
- [8] D.K. Nguyen, "Large displacement response of tapered cantilever beams made of axially functionally graded material", *Composites Part B: Engineering*, 55, 298–305, 2013. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.06.024>
- [9] D.V. Hieu, D.Q. Chan, & H.M. Sedighi, "Nonlinear bending, buckling and vibration of functionally graded nonlocal strain gradient nanobeams resting on an elastic foundation", *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 16(3), 327–346, 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.2140/jomms.2021.16.327>
- [10] H. Liu, Y. Huang, & Y. Zhao, "A unified numerical approach to the dynamics of beams with longitudinally varying cross-sections, materials, foundations, and loads using Chebyshev spectral approximation", *Aerospace*, 10(10), 842, 2023. [Online]. Available: <https://doi.org/10.3390/aerospace10100842>
- [11] M.H. Ghazwani, "New enriched beam element for static bending analysis of functionally graded porous beams resting on elastic foundations", *Mechanics of Solids*, 58(5), 1878–1893, 2023. [Online]. Available: <https://doi.org/10.3103/S0025654423600885>
- [12] D. Kaniğ, Y. Bab, A. Kutlu, & M.H. Omurtag, "Mixed finite element formulation for functionally graded beams resting on elastic foundation using HSDT", In *4th international civil engineering & architecture conference* (pp. 2177–2183). Golden Light Publishing, 2025. [Online]. Available: https://doi.org/10.31462/icearc2025_ce_sme_531
- [13] Yu.S. Krutii, Rozrobka metodu rozviazannia zadach stiikosti i kolyvan deformivnykh system zi zminnyimi neperervnymi parametramy: dys. d-ra tekhn. nauk: 01.02.04. Lutsk, 2016.

- [14] Y. Krutii, M. Suriyaninov, & V. Vandynskyi, "Exact solution of the differential equation of transverse oscillations of the rod taking into account own weight", *MATEC Web of Conferences*, 116, 02022, 2017. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1051/mateconf/201711602022>
- [15] Y.S. Krutii, "Construction of a solution of the problem of stability of a bar with arbitrary continuous parameters", *Journal of Mathematical Sciences*, 231(5), 665–677, 2018. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/s10958-018-3843-8>
- [16] Y. Krutii, M. Surianinov, S. Petrash, & M. Yezhov, "Development of an analytical method for calculating beams on a variable elastic Winkler foundation", *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 1162(1), 012009, 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1088/1757-899x/1162/1/012009>

AN ANALYTICAL METHOD FOR THE ANALYSIS OF FUNCTIONALLY GRADED BEAMS RESTING ON A WINKLER ELASTIC FOUNDATION

¹**Perperi A.**, Ph.D., Associate Professor,
a.perperi@odaba.edu.ua, ORCID: 0000-0001-7112-6864

¹**Vakulenko V.**, graduate student,
91vvv19@gmail.com, ORCID: 0009-0008-4410-7666

¹*Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture*
4, Didrihsona str., Odesa, Ukraine, 65029

Abstract. This publication addresses the analysis of so-called functionally graded beams (FGBs), whose material properties vary along their length according to a specified gradient. The study is devoted to the development of an analytical method (AM) for bending analysis of such beams resting on a homogeneous, continuous Winkler elastic foundation. The material's modulus of elasticity and the external load are assumed to be arbitrary, continuously varying functions dependent on the coordinate of the beam's neutral axis. The proposed method is based on an exact solution to the corresponding fourth-order ordinary differential equation of bending with variable coefficients. The unknown integration constants are expressed in terms of initial parameters, which are determined by applying the prescribed boundary conditions. The fundamental functions and the particular solution of the differential equation are represented as power series in a dimensionless parameter, with variable coefficients obtained through recursive integral relations. For practical convenience, the fundamental functions and the particular solution are transformed into power series format. This reduces the bending analysis of FGBs to a numerical implementation of explicit analytical expressions for stress-strain state parameters.

A numerical example demonstrates the practical application of the AM. A prismatic FGB with a parabolically varying modulus of elasticity is considered. The AM results are presented in both numerical and graphical formats for the case where the left end of the beam is simply supported and the right end is fixed. The obtained numerical values are treated as exact, since the analysis is based on an exact solution of the governing differential equation. The availability of such a method enables the assessment of the accuracy of solutions obtained using various approximate methods. For verification purposes, corresponding solutions obtained by the Finite Element Method (FEM) using the LIRA-SAPR software are also provided. The comparison confirms the validity of the proposed analytical method.

Keywords: functionally graded beam, elastic foundation, exact solution, analytical method.

Стаття надійшла до редакції 18.08.2025

Стаття прийнята до друку 13.09.2025

Дата публікації статті 24.09.2025

This work by © 2025 by *Перпері А.О., Вакуленко В.В.* is licensed under *CC BY 4.0*